Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
PD Dr. M. Kühnel
Sommer 2010

GEOMETRIE VON BLÄTTERUNGEN
BLATT 2

(1) **(Reeb-Blätterung)** Sei $M := B^2 \times S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 |\ |x| < 1, |y| = 1\} \subset \mathbb{C}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass auf $\overline{M}$ durch die 1-Form

$$\omega := -d|x|^2 + (1 - |x|^2)d\varphi$$

eine Blätterung induziert wird, so dass $\partial M \cong S^1 \times S^1$ ein Blatt ist; hierbei ist $y = e^{i\varphi}$.

(b) Zeigen Sie, dass alle anderen Blätter diffeomorph zu $\mathbb{R}^2$ sind.

(c) Sei $S^3 := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 |\ |x|^2 + |y|^2 = 2\}$ folgendermaßen zerlegt:

$$U_1 := \{(x,y) \in S^3 |\ |x| < 1\},\ U_2 := \{(x,y) \in S^3 |\ |x| > 1\}.$$

Zeigen Sie: $U_i \cong B^2 \times S^1$. Argumentieren Sie, warum dies eine Blätterung auf S^3 induziert, die genau ein kompaktes Blatt diffeomorph zum Torus $S^1 \times S^1$ hat und deren restliche Blätter diffeomorph zu $\mathbb{R}^2$ sind. *Eine solche Blätterung auf S^3 heißt Reeb-Blätterung.*

(2) **(Hopf-Faserung)** Sei $M := S^3 := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 |\ |x|^2 + |y|^2 = 1\}$. Auf S^3 wirkt die Gruppe S^1 via Multiplikation:

$$e^{i\varphi}(x,y) := (e^{i\varphi}x, e^{i\varphi}y).$$

Der Quotient S^3/S^1 kann durch folgende Abbildung mit der Sphäre S^2 identifiziert werden:

$$\Phi : S^3/S^1 \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}, [(x,y)] \mapsto (|x|^2 - |y|^2, 2x\overline{y}).$$

Die Komposition der Quotientenabbildung mit Φ werde mit $\Psi : S^3 \longrightarrow S^2$ bezeichnet. Sie heißt Hopf-Faserung von S^3.

(a) Zeigen Sie, dass Φ wohldefiniert und bijektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass Ψ eine Submersion ist.

(c) Die zugehörige Hopfblätterung werde mit $\mathcal{F}$ bezeichnet. Sei $\mathcal{E} := (T\mathcal{F})^\perp$ bezüglich der euklidischen Metrik des umgebenden $\mathbb{C}^2$. Zeigen Sie, dass die Distribution $\mathcal{E}$ nicht integrabel ist. *In der Tat gibt es keine Kodimension-1-Blätterung, die transversal zur Hopf-Faserung ist.*

(3) Sei $\mathcal{F}$ die Reebblätterung und $\mathcal{G}$ die Hopfblätterung auf S^3. Berechnen Sie den Ort der Nicht-Transversalität, d.h.

$$\{x \in S^3 |\ (T\mathcal{F})_x + (T\mathcal{G})_x \neq T_x S^3\}.$$

Date: May 4, 2010.