Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
PD Dr. M. Kühnel
Sommer 2010

GEOMETRIE VON BLÄTTERUNGEN
BLATT 6

(1) Sei eine k-dimensionale Blätterung $\mathcal{F}$ auf der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M durch die Daten (U_i, f_i, τ_{ij}) gegeben. Die

$$\tau_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow f_i(U_i \cap U_j)$$

induzieren

$$\phi_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(n-k, \mathbb{R})$$

via

$$\phi_{ij}(x) := d\tau_{ij}(f_j(x)).$$

Ist G eine Lie-Untergruppe von $GL(n-k,\mathbb{R})$, so nennen wir $\mathcal{F}$ eine G-Blätterung, wenn die Daten so gewählt werden können, dass $\phi_{ij}(x) \in G$ für alle $x \in U_i \cap U_j$.

Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathcal{F}$ eine G-Blätterung, so gilt auch $\mathrm{hol}(F) \subset G$ für alle Blätter F.

(b) Sei $GL^+(n-k,\mathbb{R}) := \{A \in Gl(n-k,\mathbb{R}) | \ \det A > 0\}$. Die Blätterung $\mathcal{F}$ ist genau dann transversal orientierbar, wenn $\mathcal{F}$ eine $GL^+(n-k,\mathbb{R})$-Blätterung ist.

(c) Eine 1-kodimensionale Blätterung $\mathcal{F}$ ist genau dann eine $\{1\}$-Blätterung, wenn sie durch eine geschlossene 1-Form gegeben wird.

(2) Seien $\mathcal{F}$ eine Blätterung auf M und $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Unterblätterung (im gleichen Sinne wie bei Untermannigfaltigkeiten). Konstruieren Sie eine natürliche Abbildung

$$\eta : \mathrm{hol}_{\mathcal{G}}(G) \longrightarrow \mathrm{hol}_{\mathcal{F}}(F),$$

wenn F ein Blatt von $\mathcal{F}$ und $G \subset F$ ein Blatt von $\mathcal{G}$ ist. Zeigen Sie:

(a) Ist die natürliche Abbildung $\pi_1(G) \longrightarrow \pi_1(F)$ surjektiv, so ist η surjektiv.

(b) Ist $\mathrm{codim}_{\mathcal{G}}\mathcal{F} = 1$ und $\mathcal{G}$ eine $SO(n-k+1,\mathbb{R})$-Blätterung, so ist η injektiv.

(c) Ist

$$\mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}_{r-1} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_1$$

eine absteigende Sequenz von $SO(r)$-Blätterungen (insbesondere also $\mathrm{codim}\mathcal{F}_r = r$), so gilt

$$\mathrm{hol}_{\mathcal{F}_r}(F_r) = \{1\}$$

für jedes Blatt F_r von $\mathcal{F}_r$.

(3) Seien M, B zwei C^∞-Mannigfaltigkeiten und $f : M \longrightarrow B$ ein Faserbündel, d.h. alle Fasern sind diffeomorph zu einer festen Mannigfaltigkeit T und zu jedem Punkt $x \in B$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset B$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : f^{-1}(U) \longrightarrow U \times T$ gibt, so dass $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi = f|_{f^{-1}(U)}$.

Ist $\mathcal{F}$ eine Blätterung auf M, so heißt f transversal zu $\mathcal{F}$, wenn für jedes Blatt F von $\mathcal{F}$

$$f|_F : F \longrightarrow B$$

Date: June 10, 2010.

eine unverzweigte, surjektive Überlagerung ist. In diesem Fall haben wir eine relative, globale Version von Holonomie, indem wir zu einem Punkt $y \in B$ und einer geschlossenen Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow B$ mit $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = y$ für jeden Punkt $x \in f^{-1}(y)$ den eindeutigen Lift $\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \longrightarrow F_x$ betrachten und

$$\varphi(\gamma)(x) := \tilde{\gamma}(2\pi)$$

setzen. Da alle Fasern diffeomorph zu T sind, erhalten wir auf diese Weise eine Abbildung

$$h : \pi_1(B) \longrightarrow \mathrm{Diff}(T), [\gamma] \mapsto \varphi(\gamma)$$

deren Bild wir mit $\mathrm{Hol}(\mathcal{F}/B)$ bezeichnen. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Hol}(\mathcal{F}/B) = \{1\} \iff (f, M, B) \cong (\mathrm{pr}_1, B \times T, B)$.

(b) Es gibt keine Kodimension-1-Blätterung auf S^3, die transversal zur Hopfblätterung ist.