Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
PD Dr. M. Kühnel
Sommer 2010

GEOMETRIE VON BLÄTTERUNGEN
BLATT 7

(1) Sei $(M, \mathcal{F})$ eine Blätterung, g eine Riemannsche Metrik auf $N\mathcal{F}$, ∇ ein Zusammenhang auf $N\mathcal{F}$ und $h : M \longrightarrow M$ ein Diffeomorphismus, so dass $f_i \circ h = f_i$ (wenn $\mathcal{F}$ durch die Daten (U_i, f_i, τ_{ij}) gegeben ist; das heisst also, dass jedes Blatt auf sich selbst abgebildet wird, "h ist ein longitudinaler Diffeomorphismus").

Zeigen Sie, dass für alle $s \in \Gamma(N\mathcal{F})$

$$h_* s := \pi(h_* Y_s)$$

unabhängig von der Wahl von $Y_s \in \Gamma(TM)$ mit $\pi(Y_s) = s$ ist.

Wie in der Vorlesung sei $h_*\nabla$ der Zusammenhang, der durch

$$(h_*\nabla)_Y s := (h^{-1})_* \nabla_{h_* Y} h_* s$$

definiert wird. Zeigen Sie:

(a) Ist ∇ adaptiert, so auch $h_*\nabla$.
(b) Ist ∇ torsions-frei, so auch $h_*\nabla$.
(c) Ist ∇ metrisch bezüglich g, so ist $h_*\nabla$ metrisch bezüglich $h^* g$.

(2) Beweisen Sie: Ist $\mathcal{F}$ eine (starke) $O(n-k)$-Blätterung, so existiert eine Riemannsche Metrik auf $N\mathcal{F}$, so dass $(\mathcal{F}, g)$ eine flache Riemannsche Blätterung ist.

(3) Zeigen Sie: Eine Riemannsche transversal orientierbare Kodimension-1-Blätterung $\mathcal{F}$ ist durch eine geschlossene 1-Form induziert; insbesondere ist $\mathrm{gv}(\mathcal{F}) = 0$.

(4) Zeigen Sie, dass die Reebblätterung nicht Riemannsch ist.

(5) Sei $\mathcal{F}$ die Hopfblätterung auf S^3. Geben Sie eine Riemannsche Metrik g auf $N\mathcal{F}$ an, so dass $(\mathcal{F}, g)$ eine Riemannsche Blätterung wird.

(6) Sei $(M, \tilde{g})$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und X ein nirgends verschwindendes Killing-Vektorfeld, d.h.

$$\mathcal{L}_X \tilde{g} = 0.$$

(Das heißt, dass der Fluss von X aus Isometrien besteht.) Sei $\mathcal{F}$ die 1-dimensionale Blätterung, die aus den Flusslinien von X besteht. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{F}, \tilde{g}_N)$ eine Riemannsche Blätterung ist.

Date: June 28, 2010.