Einführung in Mannigfaltigkeiten

PD Dr. M. Kühnel
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Geometrie Differenzierbarer Mannigfaltigkeiten

Wir wollen einen Begriff von Mannigfaltigkeit entwickeln, unter den alle "glatt" aussehenden geometrischen Objekte fallen, aber andererseits möglichst viele Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$ retten. Zunächst überlegen wir uns, dass wir zum Beispiel auf einer Kugeloberfläche eine gute Idee von offenen Mengen haben: Wir schneiden sie einfach mit einer offenen Menge des $\mathbb{R}^3$. Ebenso sollten wir auf jeder Mannigfaltigkeit wissen, was offene Mengen sind. Dies führt zum Begriff des topologischen Raumes.

1. Topologische Räume

Wir erinnern uns, dass eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ offen heißt, wenn es für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, wenn $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist. Dieser Begriff von Offenheit heißt *euklidische Topologie* und erfüllt folgende Axiome:

(i) $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ sind offen;
(ii) sind $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, so auch $U \cap V$;
(iii) sind U_i offen für alle $i \in I$, wobei I eine beliebige Menge ist, so ist auch $\bigcup_{i\in I} U_i$ offen.

Dies motiviert die folgende Definition

Definition 1.1. (i) *Ein* topologischer Raum *ist eine Menge M zusammen mit einer Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von M, so dass gilt:*
  (a) *$\emptyset \in \mathcal{O}$ und $M \in \mathcal{O}$;*
  (b) *sind $U, V \in \mathcal{O}$, so ist auch $U \cap V \in \mathcal{O}$;*
  (c) *sind $U_i \in \mathcal{O}$ für alle $i \in I$, wobei I eine beliebige Menge ist, so ist auch $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$.*

(ii) *Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt offen, wenn $U \in \mathcal{O}$. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt abgeschlossen, wenn $M \setminus A \in \mathcal{O}$.*

(iii) *Wie in der euklidischen Topologie definieren wir für eine Teilmenge $N \subset M$ ihren Abschluss*

$$\overline{N} := \bigcap \{A \subset M |\ A \text{ ist abgeschlossen und } A \supset N\}$$

sowie ihren offenen Kern

$$\mathring{N} := \bigcup \{U \subset M |\ U \text{ ist offen und } U \subset N\}.$$

Nach dem dritten Axiom eines topologischen Raumes ist $\overline{N}$ abgeschlossen und $\mathring{N}$ offen. Der Rand von N ist

$$\partial N := \overline{N} \setminus \mathring{N}$$

und stets abgeschlossen.

(iv) *Eine Teilmenge $N \subset M$ eines topologischen Raumes heißt dicht, wenn $\overline{N} = M$.*

(v) *M heißt zusammenhängend, wenn nur $\emptyset$ und M sowohl offen als auch abgeschlossen sind.*

(vi) *M heißt kompakt, wenn jede Überdeckung durch offene Mengen $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. es existieren $i_1, \dots, i_k$, so dass $M = \bigcup_{l=1}^{k} U_{i_l}$.*

(vii) *Konvergenz von Folgen ist in topologischen Räumen folgendermaßen definiert: Ist $(a_n) \subset M$ eine Folge, so heißt sie konvergent gegen $a \in M$, wenn es zu jeder offenen Menge $U \subset M$ mit $a \in U$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n \in U$ für alle $n \geq N$. Eine Folge kann mehr als einen Grenzwert haben.*

Beispiel 1.2. (i) Die sogenannte diskrete Topologie einer Menge M erhält man, indem man jede Teilmenge von M offen nennt. Damit sind auch alle Teilmengen abgeschlossen und daher M nur dann zusammenhängend, wenn M aus einem Punkt besteht. Nur terminal konstante Folgen (konstant ab einem gewissen Index) sind in ihr konvergent.

(ii) Auf einer Teilmenge $N \subset M$ eines topologischen Raumes M ist die sogenannte Relativtopologie dadurch gegeben, dass $V \in \mathcal{O}$ genau dann, wenn es eine in M offene Teilmenge $U \subset M$ gibt, so dass $V = U \cap N$. Dadurch wird jede Teilmenge eines topologischen Raumes auf natürliche Weise selbst ein topologischer Raum. Konvergenz in der Relativtopologie von N bedeutet Konvergenz in M mit einem Grenzwert in N.

(iii) Auf $\mathbb{C}^n$ ist die *Zariski*-Topologie dadurch gegeben, dass gemeinsame Nullstellenorte einer Menge von Polynomen genau die abgeschlossenen Mengen sind. Fast jede Folge hat jeden Punkt als Grenzwert. Ist zum Beispiel $(a_k) \subset \mathbb{C}$ eine Folge mit paarweise verschiedenen a_k, so konvergiert a_k gegen jeden Punkt in $\mathbb{C}$: Die offenen Mengen sind Komplemente von endlich vielen Punkten, also können in jeder offenen Menge U nur endlich viele a_k nicht in U liegen.

(iv) Auf $\mathbb{Q}$ kann man folgende "Topologie der partiellen Ordnung" einführen: $U \subset \mathbb{Q}$ ist offen, wenn $U = \emptyset, \mathbb{Q}$ oder von der Form $\{q \in \mathbb{Q} | q > r\}$ für ein $r \in \mathbb{R}$. Ist a_n eine Folge in $\mathbb{Q}$, die in der Relativtopologie der euklidischen Topologie gegen a konvergiert, so ist $(-\infty, a] \cap \mathbb{Q}$ die Menge der Grenzwerte von a_n in der Topologie der partiellen Ordnung.

(v) Ist $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung und M ein topologischer Raum, so spricht man von der Quotiententopologie auf N, wenn eine Menge in $U \subset N$ genau dann offen ist, wenn $f^{-1}(U) \subset M$ offen ist.

(vi) Die Menge aller Abbildungen $\{f : M \longrightarrow N\}$ zwischen einer Menge M und einem topologischen Raum N trägt die Topologie der punktweisen Konvergenz, indem man eine Menge $A \subset \{f : M \longrightarrow N\}$ abgeschlossen nennt, wenn für jede Folge $f_n \in A$ und Abbildung $f : M \longrightarrow N$, so dass $f_n(x)$ gegen $f(x)$ konvergiert für alle $x \in M$, auch $f \in A$ ist.

(vii) Ein reeller Vektorraum V trägt eine natürliche Topologie, indem man definiert: $U \in \mathcal{O}$ genau dann, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ und linearen Abbildungen $\phi : \mathbb{R}^k \longrightarrow V$ das Urbild $\phi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^k$ offen in der euklidischen Topologie ist.

$\triangle$

Wir sehen, dass topologische Räume eine Vielzahl von, teils seltsam anmutenden, Gestalten annehmen können; viel mehr als wir für den Begriff der Mannigfaltigkeit zulassen wollen. Eine besonders wichtige Eigenschaft, die Mannigfaltigkeiten vom $\mathbb{R}^n$ übernehmen sollten, ist die Eindeutigkeit von Grenzwerten. Diese lässt sich in einem Trennungsaxiom formulieren:

Definition 1.3. *Ein topologischer Raum M heißt* hausdorffsch*, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in M$ mit $x \neq y$ offene Mengen U, V gibt mit $x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Salopper gesagt: Zwei Punkte lassen sich stets durch offene Umgebungen trennen.*

Lemma 1.4. *Ist M ein hausdorffscher topologischer Raum, so konvergiert jede Folge gegen höchstens einen Punkt.*

Beweis. Nehmen wir an a_n sei eine Folge in M mit verschiedenen Grenzwerten a und b. Wegen der Hausdorffeigenschaft gibt es offene Mengen U und V, so dass $a \in U, b \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Da aber a und b Grenzwerte der Folge a_n sind, gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \in U$ für alle $n \geq N_1$ und $N_2 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \in V$ für alle $n \geq N_2$. Für $n \geq \max(N_1, N_2)$ gilt also $a_n \in U \cap V = \emptyset$, ein Widerspruch. □

Beispiel 1.5. Die Beispiele der diskreten und der Vektorraumtopologie (1.2 (i) und (vii)) sind hausdorffsch. Die Zariski-Topologie und die der partiellen Ordnung auf $\mathbb{Q}$ (Beispiel 1.2 (iii) und (iv)) sind nicht hausdorffsch. Die Relativtopologie von $N \subset M$ ist hausdorffsch, wenn M hausdorffsch ist. Die Quotiententopologie aus Beispiel 1.2 (v) ist nicht notwendig hausdorffsch, auch, wenn M hausdorffsch ist. △

Zudem können topologische Räume viel zu hohe Kardinalitäten aufweisen, um geometrisch interpretierbar zu sein. Die Kardinalität von $\mathbb{R}^n$ ist die gleiche wie die von $\mathbb{R}$; diese wollen wir also auch mit Mannigfaltigkeiten nicht überschreiten.

Beispiel 1.6. Ist M ein topologischer Raum, so wird

$$\mathcal{P}(M) := \{N \subset M\},$$

die sogenannte Potenzmenge von M, wieder ein topologischer Raum, indem wir $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(M)$ offen nennen, wenn für alle $N \in \mathcal{U}$ eine offene Menge $U \supset N$ existiert, so dass stets $\tilde{U} \in \mathcal{U}$, wenn $N \subset \tilde{U} \subset U$ und $\tilde{U}$ offen ist.

Ist M Hausdorffsch, so auch $\mathcal{P}(M)$: Seien $N, N' \subset M$ und $x' \in N' \setminus N (\neq \emptyset$ ohne Einschränkung). Nach Voraussetzung existieren für alle $x \in N$ offene Mengen $U(x) \ni x, U'(x) \ni x'$, so dass $U(x) \cap U'(x) = \emptyset$. Inbesondere ist $x' \notin \bigcup_{x \in N} U(x) =: U$, also $N' \not\subset U$; weiter ist U offen und $N \subset U$. Die in $\mathcal{P}(M)$ offenen Mengen

$$\mathcal{U} := \{V | \ N \subset V \subset U\}, \mathcal{U}' := \{V' | \ N' \subset V'\}$$

erfüllen $N \in \mathcal{U}, N' \in \mathcal{U}'$ und $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \emptyset$.

Die Kardinalität der Potenzmenge von M ist immer größer als die Kardinalität von M. Also bekommen wir auf diese Weise hausdorffsche topologische Räume mit hohen Kardinalitäten. △

Um die Kardinalität sinnvoll zu beschränken, benötigen wir ein weiteres Axiom.

Definition 1.7. *Ein topologischer Raum M heißt zweit-abzählbar, wenn es eine abzählbare Menge $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots\}$ von offenen Mengen gibt, so dass für jede offene Menge $U \subset M$ eine Teilmenge $S \subset \mathbb{N}$ existiert, so dass $U = \bigcup_{i \in S} U_i$. Die $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ nennt man dann eine Basis der Topologie.*

Beispiel 1.8. So überraschend es auch klingen mag, die euklidische Topologie in $\mathbb{R}^n$ ist zweit-abzählbar. Die Mengen

$$U_{p,q} := B_q(p)$$

mit $p, q \in \mathbb{Q}$ tun das Gewünschte und sind abzälbar viele.

Andererseits ist die induzierte Topologie auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ nicht zweit-abzählbar. △

Beispiel 1.2 (vii) ist für uns von besonderem Interesse. Wir wollen sehen, dass im Fall $V = \mathbb{R}^n$ die bereits bekannte euklidische Topologie herauskommt.

Lemma 1.9. *Ist $V = \mathbb{R}^n$, so stimmen die Vektorraumtopologie und die euklidische überein.*

Beweis. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ euklidisch offen, $\phi : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linear und $x \in \phi^{-1}(U)$. Wir dürfen annehmen, dass ϕ nicht die Nullabbildung ist (sonst ist die Aussage trivial). Sei $A \in M(n \times k, \mathbb{R})$ die Matrix, so dass $\phi(z) = Az$. Nach Voraussetzung gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(\phi(x)) \subset U$. Damit haben wir, dass

$$|\phi(x + y) - \phi(x)| = |\phi(y)| \leq \|A\| \cdot |y| < \varepsilon$$

wenn wir $|y| < \frac{\varepsilon}{\|A\|}$ wählen. Also ist

$$B_{\frac{\varepsilon}{\|A\|}}(x) \subset \phi^{-1}(U),$$

d.h. $\phi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^k$ ist offen.

Ist nun $U \subset \mathbb{R}^n$ offen in der Vektorraumtopologie, so wählen wir $k = n$ und ϕ als Identität; damit erhalten wir, dass U auch in der euklidischen Topologie offen ist. □

Auf topologischen Räumen kann man stetige Abbildungen definieren.

Definition 1.10. (i) *Seien M, N topologische Räume und $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. f heißt* stetig, *wenn für jede offene Menge $U \subset N$ das Urbild $\phi^{-1}(U) \subset M$ offen ist.*

(ii) *Sind M, N topologische Räume, $f : M \longrightarrow N$ stetig, bijektiv und f^{-1} ebenfalls stetig, so heißt f ein* Homöomorphismus.

Es sollte nicht überraschen, dass im Falle, dass M, N Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit der Relativtopologie sind stetige Abbildungen genau die sind, die wir bereits kennen.

Lemma 1.11. *Sind V, W reelle Vektorräume ausgestattet mit der Vektorraumtopologie und $\psi : V \longrightarrow W$ linear, so ist ψ stetig.*

Beweis. Ist $U \subset W$ offen und $\phi : \mathbb{R}^k \longrightarrow V$ linear, so ist $\psi \circ \phi : \mathbb{R}^k \longrightarrow W$ linear und daher $\phi^{-1}(\psi^{-1}(U)) = (\psi \circ \phi)^{-1}(U)$ offen. Also ist $\psi^{-1}(U) \subset V$ offen. □

Bemerkung 1.12. Diese Aussage gilt auch für unendlichdimensionale Vektorräume, z.B. Funktionenräume. Jedoch werden wir später sehen, dass dann die beschriebene Topologie nicht mehr so interessant ist. Stattdessen werden wir andere Topologien betrachten, für die lineare Abbildungen dann nicht mehr notwendig stetig sind. ◇

2. Normierte Vektorräume

Definition 2.1. (i) *Sei V ein reeller Vektorraum. Eine* Norm *auf V ist eine Abbildung*

$$\|.\| : V \longrightarrow \mathbb{R},$$

so dass

(a) $\|x\| \geq 0$ *für alle* $x \in V$ *und* $\|x\| = 0 \iff x = 0$ *("positiv definit");*

(b) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *für alle* $x, y \in V$ *("Dreiecksungleichung");*

(c) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}, x \in V$ *("Homogenität").*

$(V, \|.\|)$ *heißt ein* normierter Vektorraum.

(ii) *Ein normierter Vektorraum ist ein hausdorffscher topologischer Raum, indem man als offene Mengen genau die $U \subset V$ nimmt, für die zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) := \{y \in V | \; \|y - x\| < \varepsilon\} \subset U$.*

(iii) *Zwei Normen auf V heißen äquivalent, wenn wenn sie die gleiche Topologie induzieren, d.h. die offenen Mengen sind dieselben.*

Lemma 2.2. *Sind V ein Vektorraum und $\|.\|_1, \|.\|_2$ Normen auf V, so sind sie genau dann äquivalent, wenn es Konstanten $c, C > 0$ gibt, so dass*

$$c\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$$

für alle $x \in V$.

Beweis. Seien zunächst solche Konstanten gegeben. Bemerke, dass wir die Rollen von $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ vertauschen dürfen, indem wir statt c die Konstante C^{-1} und statt C die

Konstante c^{-1} wählen. Wir bezeichnen die Topologie von $\|.\|_i$ mit $\mathcal{O}_i$. Sei $U \in \mathcal{O}_1$ und $x \in U$. Nach Definition gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\{y \in V | \; \|x - y\|_1 < \varepsilon\} \subset U.$$

Damit ist aber auch

$$\{y \in V | \; \|x - y\|_2 < C^{-1}\varepsilon\} \subset U$$

und damit $U \in \mathcal{O}_2$. Vertauschung der Indizes wie anfangs erwähnt zeigt $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.

Nehmen wir nun umgekehrt an, es gelte $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$. Wegen der Dreiecksungleichung für $\|.\|_1$ ist

$$B_1^{(1)}(0) := \{x \in V | \; \|x\|_1 < 1\} \in \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2,$$

insbesondere existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$B_\varepsilon^{(2)}(0) = \{x \in V | \; \|x\|_2 < \varepsilon\} \subset B_1^{(1)}(0).$$

Ist $0 \neq x \in V$, so ist $\frac{\varepsilon}{2\|x\|_2} x \in B_\varepsilon^{(2)}(0) \subset B_1^{(1)}(0)$, also gilt

$$\frac{\varepsilon \|x\|_1}{2\|x\|_2} < 1,$$

das heißt, dass für $C := 2\varepsilon^{-1}$ gilt

$$\|x\|_1 \leq C\|x\|_2.$$

Die andere Ungleichung erhalten wir wieder durch Vertauschen der Indizes 1 und 2. □

Beispiel 2.3. Auf $\mathbb{R}^n$ sind für $1 \leq p < \infty$

$$\|x\|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

und

$$\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$$

Normen. Die Gültigkeit der Dreieicksungleichung werden wir an späterer Stelle beweisen. All diese Normen sind äquivalent, denn einerseits ist

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq n^{\frac{1}{p}} \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| = n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty,$$

andererseits ist

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \geq \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| = \|x\|_\infty.$$

△

Satz 2.4. *Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V sind alle Normen äquivalent.*

Beweis. Sei $\|.\|_V$ eine Norm auf V. Nach Wahl eines Isomorphismus $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ haben wir eine Norm $\|.\|$ auf $\mathbb{R}^n$, indem wir definieren

$$\|x\| := \|\psi(x)\|_V.$$

Es reicht also zu zeigen, dass auf $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind. Dafür reicht es wiederum zu zeigen, dass alle Normen zu einer bestimmten Norm äquivalent sind. Wir wählen als diese Referenznorm $\|.\|_\infty$. Ist $x = (x^1, \ldots, x^n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, so liefern die Normaxiome

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^n \|e_i\|,$$

also haben wir schon einmal die rechtsseitige Ungleichung.

Für die linksseitige Ungleichung wollen wir zeigen, dass $\|.\| : (\mathbb{R}^n, \|.\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, \|.\|_2)$ stetig ist (, d.h. stetig im üblichen euklidischen Sinne). Dazu benutzen wir die Abschätzung aus dem ersten Teil und Beispiel 2.3 und erhalten mit $C := \max_{i=1,\dots,n} \|e_i\|$ die Abschätzung

$$\|x - y\| \leq C\|x - y\|_\infty \leq C\|x - y\|_2,$$

insbesondere gilt für eine Folge $x_n \longrightarrow x$ (in der euklidischen Topologie) wegen der Dreiecksungleichung für $\|.\|$

$$|\|x\| - \|x_n\|| \leq \|x - x_n\| \leq C\|x - x_n\|_2 \longrightarrow 0.$$

Damit ist $\|.\|$ stetig. Die Menge $\partial Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | \ \|x\|_\infty = 1\}$ ist kompakt, also nimmt die stetige Funktion $\|.\||_{\partial Q_1}$ auf ∂Q_1 ihr Minimum an. Dieses kann nicht 0 sein, da $0 \notin \partial Q_1$ und $\|.\|$ positiv definit ist. Sei also

$$c := \min_{\{\|x\|_\infty = 1\}} \|x\| > 0.$$

Diese Konstante erfüllt die gewünschte Ungleichung

$$\|x\| = \|\frac{x}{\|x\|_\infty}\| \cdot \|x\|_\infty \geq c\|x\|_\infty,$$

da $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in \partial Q_1$. □

Korollar 2.5. *Ist $(V, \|.\|)$ ein endlichdimensionaler normierter Vektorraum , so ist die induzierte Topologie stets die Vektorraumtopologie.*

Beweis. Dies folgt aus der Äquivalenz aller Normen und Lemma 1.9. □

Für unendlichdimensionale normierte Vektorräume spielt der Begriff der Vollständigkeit eine wichtige Rolle. Neben dem topologischen Begriff der Konvergenz erlaubt uns die Norm, auch den Begriff der Cauchyfolge zu bilden.

Definition 2.6. *Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum.*

(i) *Eine Folge $(a_n) \subset V$ heißt Cauchyfolge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass*

$$\|a_k - a_l\| < \varepsilon$$

für alle $k, l \geq N$.

(ii) *Ein normierter Vektorraum $(V, \|.\|)$ heißt vollständig oder Banachraum, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.*

Beispiel 2.7.

(i) Jeder endlichdimensionale normierte Vektorraum ist vollständig: Wegen der Äquivalenz der Normen kann man sich auf den euklidischen $\mathbb{R}^n$ zurückziehen; dieser ist nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß vollständig.

(ii) Der Vektorraum $C^0(I)$ der stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall I ist zusammen mit der Norm

$$\|f\|_0 := \max_{x \in I} |f(x)|$$

vollständig. Mit der Norm

$$\|f\|_1 := \int_I |f(x)| dx$$

wäre der Vektorraum $C^0(I)$ nicht vollständig. Insbesondere sind die beiden Normen nicht äquivalent.

△

Gegeben einen normierten Vektorraum, können wir ihn stets vervollständigen.

Konstruktion 2.8. Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum. Wir konstruieren

$$\tilde{V} := \{(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset V \text{ Cauchyfolge bezüglich } \|.\|\}/\sim,$$

wobei wir zwei Cauchyfolgen v_i und w_i identifizieren ($(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim (w_i)_{i\in\mathbb{N}}$), wenn $(v_i - w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Wir schreiben $[(v_i)]$ für die Äquivalenzklasse von (v_i).

$\tilde{V}$ ist wieder ein Vektorraum. Dafür benutzt man, dass Summen und Vielfache von Nullfolgen wieder Nullfolgen sind. Auf $\tilde{V}$ haben wir die induzierte Norm

$$\|[(v_i)]\|_\sim := \lim_{i\longrightarrow\infty} \|v_i\|.$$

Da (v_i) eine Cauchyfolge ist, ist wegen der Dreiecksungleichung $\|v_i\|$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, also existiert der rechtsseitige Grenzwert; und hängt nur von $[(v_i)]$ ab. Dreiecksungleichung, Positivität und Homogenität übertragen sich direkt auf $\|.\|_\sim$. Bleibt zu zeigen

$$\|[(v_i)]\|_\sim = 0 \iff \lim_{i\longrightarrow\infty} v_i = 0.$$

Da aber (wieder wegen der Dreiecksungleichung) v_i genau dann gegen 0 konvergiert, wenn $\|v_i\|$ gegen 0 konvergiert, ist auch diese Aussage wahr.

Wir wissen nun, dass $(\tilde{V}, \|.\|_\sim)$ ein normierter Vektorraum ist. Er enthält V, indem wir jedes Element $v \in V$ mit der Äquivalenzklasse der konstanten Cauchyfolge $v_i := v$ identifizieren. Offenbar gilt dann auch

$$\|v\|_\sim = \|v\| \;\forall\; v \in V.$$

$\tilde{V}$ ist auch vollständig. Um dies zu sehen, betrachten wir eine Cauchyfolge $(\gamma^i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \tilde{V}$. Das bedeutet, jedes $\gamma^i = [(v_k^i)_{k\in\mathbb{N}}]$ ist die Äquivalenzklasse einer Cauchyfolge $(v_k^i)_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ und für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N > 0$, so dass für alle $i, j \geq N$

$$\|\gamma^i - \gamma^j\|_\sim < \varepsilon.$$

Die letzte Bedingung rechnen wir um zu

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \|v_k^i - v_k^j\| < \varepsilon.$$

Dies wiederum bedeutet, dass zu jeden $i, j > N$ ein $M(i, j)$ existiert, so dass

$$\|v_k^i - v_k^j\| < \varepsilon \;\forall\; k \geq M(i, j).$$

Da jedes $(v_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, existiert auch zu jedem i ein $L(i)$, so dass

$$\|v_k^i - v_l^i\| < \varepsilon \;\forall\; k, l \geq L(i).$$

Wir betrachten die Folge v_i gegeben durch $v_i := v_{L(i)}^i$. Da für die Indizes i, j, l mit $i, j \geq N$ und $l \geq \max\{L(i), L(j), M(i, j)\}$ die Abschätzung

$$\|v_i - v_j\| = \|v_{L(i)}^i - v_{L(j)}^j\| \leq \|v_{L(i)}^i - v_l^i\| + \|v_l^i - v_l^j\| + \|v_l^j - v_{L(j)}^j\| < 3\varepsilon$$

gilt, ist (v_i) eine Cauchyfolge und daher $\gamma := [(v_i)] \in \tilde{V}$. Wir wollen zeigen, dass

$$\lim_{i\longrightarrow\infty} \gamma^i = \gamma \in \tilde{V}.$$

Dazu müssen wir zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein K existiert, so dass

$$\|\gamma^i - \gamma\|_\sim < 3\varepsilon$$

für alle $i > K$. Da die letzte Ungleichung ausgeschrieben

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \|v_k^i - v_{L(k)}^k\| < 3\varepsilon$$

für alle $i > K$ lautet, müssen wir also ein $J(i)$ finden, so dass

$$\|v_k^i - v_{L(k)}^k\| < 3\varepsilon \;\forall\; i > K, k > J(i).$$

Dazu wählen wir $K := N, J(i) := \max\{N, L(i)\}$ und $l > \max\{L(i), L(k), M(i, k)\}$ und berechnen ähnlich wie oben

$$\|v_k^i - v_{L(k)}^k\| \leq \|v_k^i - v_l^i\| + \|v_l^i - v_l^k\| + \|v_l^k - v_{L(k)}^k\| < 3\varepsilon$$

für alle $i > K, k > J(i)$. Damit haben wir gezeigt, dass jede Cauchyfolge in $\tilde{V}$ konvergiert, also ist $\tilde{V}$ vollständig.

Wir nennen $(\tilde{V}, \|.\|_\sim)$ die Vervollständigung von $(V, \|.\|)$. △

Bemerkung 2.9. Man kann zeigen, dass in gewissem Sinne $\tilde{V}$ der kleinste Banachraum ist, der V enthält. Insbesondere ist $\tilde{V} = V$, wenn V bereits ein Banachraum war und stets ist $V \subset \tilde{V}$ dicht: Die Cauchyfolge $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen die Klasse $[(v_i)] \in \tilde{V}$. ⋄

Definition 2.10. und Proposition *Sind $(V, \|.\|_1), (W, \|.\|_2)$ normierte Vektorräume, so definieren wir den Vektorraum*

$$\mathrm{Hom}(V,W) := \{\varphi : V \longrightarrow W |\ \varphi \textit{ ist linear } \}.$$

Eine lineare Abbildung $\varphi : V \longrightarrow W$ heißt beschränkt, wenn

$$\|\varphi\|_{op} := \sup_{\|x\|_1=1} \|\varphi(x)\|_2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\varphi(x)\|_2}{\|x\|_1} < \infty,$$

in Worten: Die Operatornorm von φ ist endlich. Der Vektorraum

$$L(V,W) := \{\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W) |\ \varphi \textit{ ist beschränkt } \}$$

wird mit $\|.\|_{op}$ zu einem normierten Vektorraum. Wir nennen

$$V^* := L(V,\mathbb{R})$$

den Dualraum von V. Ist W ein Banachraum, so ist $L(V,W)$ ebenfalls ein Banachraum; inbesondere ist der Dualraum eines normierten Vektorraumes stets ein Banachraum.

Beweis. Zu zeigen, dass $\|.\|_{op}$ tatsächlich eine Norm ist, verbleibt dem Leser als Übung. Ist W ein Banachraum und φ_n eine Cauchyfolge in $L(V,W)$, so zeigt man, dass $\varphi(x) := \lim_{n\longrightarrow\infty} \varphi_n(x)$ für alle $x \in V$ existiert; dazu benutzt man, dass W ein Banachraum ist. Schließlich muss man zeigen, dass φ linear und beschränkt ist. Auch dies bleibt dem Leser überlassen. □

Proposition 2.11. *Sind $(V, \|.\|_1), (W, \|.\|_2)$ normierte Vektorräume, so ist eine lineare Abbildung $\varphi : V \longrightarrow W$ genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist.*

Beweis. Sei φ beschränkt, sagen wir $\|\varphi\|_{op} = C$, $U \subset W$ offen und $x \in \varphi^{-1}(U)$. Nach Voraussetzung existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(\varphi(x)) \subset U$. F"ur alle $y \in B_{\frac{\varepsilon}{C}}(x)$ gilt

$$\|\varphi(y) - \varphi(x)\|_2 = \|\varphi(y-x)\|_2 \leq C\|y-x\|_1 \leq \varepsilon,$$

das heißt $\varphi(y) \in U$ und damit $y \in \varphi^{-1}(U)$. Also haben wir

$$B_{\frac{\varepsilon}{C}}(x) \subset \varphi^{-1}(U)$$

bewiesen. Daher ist $\varphi^{-1}(U)$ offen und das war zu zeigen.

Sei nun φ stetig. Es ist $B_1^{(2)}(0) \subset W$ offen und $0 \in \varphi^{-1}(B_1(0))$. Daher existiert $\varepsilon > 0$, so dass

$$B_\varepsilon^{(1)}(0) \subset \varphi^{-1}(B_1^{(2)}(0)).$$

Dies bedeutet aber wie zuvor

$$\|\varphi(x)\|_2 \leq \varepsilon^{-1}\|x\|_1,$$

also $\|\varphi\|_{op} \leq \varepsilon^{-1}$. □

BEMERKUNG 2.12. Ist V endlich-dimensional, so ist jede lineare Abbildung $\varphi : V \longrightarrow W$ zwischen normierten Vektorräumen beschränkt. Um dies zu sehen, dürfen wir $V = \mathbb{R}^n$ und $\|.\|_V = \|.\|_\infty$ annehmen. Dann gilt für $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in V$ nach der Dreiecksungleichung

$$\frac{\|\varphi(v)\|_W}{\|v\|_\infty} \leq \frac{\|v\|_\infty \sum_{i=1}^n \|\varphi(e_i)\|_W}{\|v\|_\infty} = \sum_{i=1}^n \|\varphi(e_i)\|_W < \infty$$

unabhängig von v. ◇

PROPOSITION 2.13. *Seien V, W normierte Vektorräume und $\tilde{V}, \tilde{W}$ deren Vervollständigungen. Die Einschränkungsabbildung*

$$\rho : L(\tilde{V}, \tilde{W}) \longrightarrow L(V, \tilde{W}), \phi \mapsto \phi|_V$$

ist ein Isomorphismus; anders ausgedrückt: Jede stetige lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

zwischen normierten Vektorräumen besitzt eine eindeutige stetige lineare Fortsetzung

$$\tilde{\varphi} : \tilde{V} \longrightarrow \tilde{W}$$

auf die Vervollständigungen $\tilde{V}$ von V bzw. $\tilde{W}$ von W.

BEWEIS. Sei $\phi \in L(V, W)$ und $\|.\|_V, \|.\|_W$ die Normen auf den Subskript-Vektorräumen. Wir nehmen eine Cauchyfolge $(v_i) \subset V$ und betrachten $w_i := \phi(v_i)$. Da ϕ beschränkt ist, folgt

$$\|w_i - w_j\|_W = \|\phi(v_i) - \phi(v_j)\|_W \leq \|\phi\|_{op} \|v_i - v_j\|_V,$$

das heißt, dass auch $(w_i) \subset W$ eine Cauchyfolge ist. Weiter ist für jede andere Cauchyfolge $(v_i)'$ mit $\lim_{i \longrightarrow \infty}(v_i - v_i') = 0$ mit derselben Rechnung auch $\lim_{i \longrightarrow \infty}(w_i - w_i') = 0$, wenn $w_i' := \phi(v_i')$ bezeichnet. Also ist $\tilde{\phi} : \tilde{V} \longrightarrow \tilde{W}$ definiert durch

$$\tilde{\phi}([(v_i)]) := [(\phi(v_i))]$$

eine wohldefinierte lineare Fortsetzung von ϕ. Schließlich berechnen wir

$$\|\tilde{\phi}([(v_i)])\|_{\tilde{W}} = \lim_{i \longrightarrow \infty} \|\phi(v_i)\|_W \leq \lim_{i \longrightarrow \infty} \|\phi\|_{op} \|v_i\|_V = \|\phi\|_{op} \|[(v_i)]\|_{\tilde{V}},$$

daher

$$\|\tilde{\phi}\|_{op} = \|\phi\|_{op}.$$

Damit ist $\tilde{\phi} \in L(\tilde{V}, \tilde{W})$.

Zur Eindeutigkeit: Ist $\psi : \tilde{V} \longrightarrow \tilde{W}$ eine beliebige stetige Fortsetzung von ϕ, so muss wegen der Stetigkeit für jede Cauchyfolge $(v_i) \subset V$ gelten

$$\psi([(v_i)] = \lim_{i \longrightarrow \infty} \psi(v_i) = \lim_{i \longrightarrow \infty} \phi(v_i) = \tilde{\phi}([(v_i)],$$

also $\psi = \tilde{\phi}$. □

Zum Schluss dieses Abschnitts wollen wir klären, wie es mit der Hausdorffeigenschaft und der Zweitabzählbarkeit in Banachräumen aussieht. Hausdorffsch ist die Topologie stets, denn man kann Punkte immer durch offene Bälle trennen. Die Zweitabzählbarkeit ist garantiert, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge des Banachraums gibt. Diese Eigenschaft nennt man Separabilität und wird von vielen Funktionenräumen geteilt, die wir für die Integrationstheorie konstruieren werden.

3. Differentiation in Vektorräumen

Definition 3.1. *Seien $(V, \|.\|_1), (W, \|.\|_2)$ reelle normierte Vektorräume und $U \subset V$ offen. Eine Abbildung $f : U \longrightarrow W$ heißt total oder Fréchet-differenzierbar in $x \in U$, wenn es eine stetige lineare Abbildung $df(x) : V \longrightarrow W$ und eine stetige Abbildung $r : U \longrightarrow W$ gibt, so dass für alle $y \in U$*

$$f(y) = f(x) + df(x)(y - x) + r(y)$$

gilt und

$$\lim_{y \longrightarrow x} \frac{\|r(y)\|_2}{\|y - x\|_1} = 0$$

ist. $df(x)$ heißt das Differential *von f in x.*

Bemerkung 3.2. (i) Sofern $df(x)$ existiert, ist es eindeutig: Wäre $\varphi : V \longrightarrow W$ eine andere stetige lineare Abbildung, $s : U \longrightarrow W$ mit der gleichen Eigenschaft wie r, so dass

$$f(y) = f(x) + \varphi(x - y) + s(y),$$

so würde folgen

$$0 = (df(x) - \varphi)(x - y) + r(y) - s(y)$$

für alle $y \in U$; insbesondere

$$\|df(x) - \varphi\|_{op} = \lim_{y \longrightarrow x} \frac{\|r(y) - s(y)\|_2}{\|y - x\|_1} = 0,$$

also ist $df(x) = \varphi$.

(ii) Sind V, W endlich-dimensional, so ist wegen 2.4 totale Differenzierbarkeit einer Abbildung f unabhängig von den Normen auf V und W; genauer ist sogar $df(x)$ davon unabhängig. Wir werden dies sogleich ausnutzen.

◇

Wir wollen nun $df(x)$ in Koordinaten darstellen.

Satz 3.3. *Sind V, W endlichdimensionale Vektorräume, $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_k\} \subset V, \mathcal{C} = \{g_1, \ldots, g_l\} \subset W$ Basen, $U \subset V$ offen und $f : U \longrightarrow W$ total differenzierbar, so ist die Matrix*

$$(1) \qquad {}_{\mathcal{C}}df(x)_{\mathcal{B}} = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x)\right)_{i,j} := \left(\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f^i(x + he_j) - f^i(x)}{h}\right)_{i,j},$$

wobei $f(x) = \sum_{i=1}^{l} f^i(x) g_i, x = \sum_{i=1}^{k} x^i e_i$ gilt. Diese Matrix heißt auch Jacobi-Matrix *und wird oft als J_f notiert. Ist $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}$, so nennt man das Transponierte der entstehenden Zeile auch* Gradient *von f und notiert ihn ∇f.*

Existieren umgekehrt die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ für alle $x \in U$ und ist die durch Gleichung 1 definierte stetige lineare Abbildung $df(x) : V \longrightarrow W$ stetig von x abhängig, d.h. ist

$$df : U \longrightarrow L(V, W), x \mapsto df(x)$$

stetig, so ist f total differenzierbar und df das Differential.

Beweis. Wir beweisen nur den ersten Teil. Nach der definierenden Gleichung gilt

$$f^i(y) - f^i(x) = \sum_{j=1}^{k} ({}_{\mathcal{C}}df(x)_{\mathcal{B}})_{ij}(y^j - x^j) + r^i(y).$$

Setzt man $y := x + he_j$, so erhält man

$$f^i(x + he_j) - f^i(x) = h({}_{\mathcal{C}}df(x)_{\mathcal{B}})_{ij} + r^i(x + he_j).$$

Mit der definierenden Eigenschaft von r folgt die Behauptung.

Die Aussage des zweiten Teils fand schon im zweiten Semester Erwähnung. $\square$

Beispiel 3.4. (i) Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Wir haben im zweiten Semester gesehen, dass f partiell differenzierbar ist, aber nicht stetig. Insbesondere ist f nicht total differenzierbar in 0.

Ausserhalb von $(0,0)$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2} - 2\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} - 2\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2},$$

also ist f außerhalb von $(0,0)$ stetig partiell differenzierbar und damit total differenzierbar. Die Matrixdarstellung von $df(x,y)$ in den Standardbasen ist

$$df(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 2\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x}{x^2+y^2} - 2\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

für alle $(x,y) \neq (0,0)$.

(ii) Ist $f : V \longrightarrow W$ linear, so gilt $df(x) = f$ für alle $x \in V$, denn

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Damit folgt $df(x)(y) = f(y)$.

(iii) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Die Abbildung

$$\det : L(V,V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist total differenzierbar. Zunächst betrachten wir $x = \mathrm{id}$ und $y = \mathrm{id} + \varphi$. Es gilt

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{id}+\varphi) &= \chi_\varphi(-1) \\ &= 1 + \mathrm{tr}\varphi + a_2(\varphi) + \cdots + \det\varphi \\ &= 1 + \mathrm{tr}\varphi + r(\mathrm{id}+\varphi) \end{aligned}$$

für eine Funktion $r : L(V,V) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{\varphi \longrightarrow 0} \frac{r(\mathrm{id}+\varphi)}{\|\varphi\|_{op}} = 0,$$

weil die $a_i(\varphi)$ Polynome vom Grad i in den Matrixeinträgen von φ nach Wahl einer Basis sind und $\|.\|_{op}$ nach Satz 2.4 äquivalent ist zur Matrixnorm gegeben durch die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^{n^2}$. Also ist det in id total differenzierbar mit

$$d(\det)(\mathrm{id}) = \mathrm{tr}.$$

In beliebigen Punkten $\psi \in L(V,V)$ mit $\det\psi \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \det(\psi+\varphi) &= \det\psi \det(\mathrm{id}+\psi^{-1}\circ\varphi) \\ &= \det\psi + \det\psi \cdot \mathrm{tr}(\psi^{-1}\circ\varphi) + \tilde{r}(\mathrm{id}+\psi^{-1}\circ\varphi), \end{aligned}$$

wieder mit $\tilde{r}$ so, dass

$$\lim_{\varphi \longrightarrow 0} \frac{\tilde{r}(\mathrm{id}+\psi^{-1}\circ\varphi)}{\|\varphi\|_{op}} = 0,$$

also haben wir

$$d(\det)(\psi)(\varphi) = \det\psi \cdot \mathrm{tr}(\psi^{-1}\circ\varphi).$$

Setzen wir $V = \mathbb{R}^n$ und werden ψ durch die Matrix A und φ durch die Matrix B repräsentiert, so sehen wir, dass

$$(\det A) \cdot A^{-1} = \operatorname{adj}(A) := ((-1)^{k+l} \det A_{lk})_{k,l}$$

die transponierte Kofaktorenmatrix von A ist, die eben auch existiert, wenn $\det A = 0$ ist. Also können wir allgemeiner und kürzer schreiben

$$d(\det)(A)(B) = \operatorname{tr}(\operatorname{adj}(A)B).$$

Insbesondere ist det überall total differenzierbar.

△

Satz 3.5. (Kettenregel) *Sind* $(V, \|.\|_1), (W, \|.\|_2), (Z, \|.\|_3)$ *normierte Vektorräume,* $U \subset V$ *offen,* $\tilde{U} \subset W$ *offen,* $g(U) \subset \tilde{U}$ *und* $f : \tilde{U} \longrightarrow Z, g : U \longrightarrow W$ *total differenzierbare Abbildungen, so ist auch* $f \circ g : U \longrightarrow Z$ *total differenzierbar und es gilt für alle* $x \in U$

$$d(f \circ g)(x) = df(g(x)) \circ dg(x).$$

Beweis. Sei $x \in U$ und y so, dass $x + y \in U$.

$$\begin{aligned} f \circ g(x+y) &= f(g(x)) + df(g(x))(g(x+y) - g(x)) + r(g(x+y)) \\ &= f \circ g(x) + df(g(x))(dg(x)(y) + s(x+y)) + r(g(x+y)) \\ &= f \circ g(x) + df(g(x)) \circ dg(x)(y) + df(g(x))(s(x+y)) + r(g(x+y)). \end{aligned}$$

Sei nun für $z \in U$ die Abbildung $t : U \longrightarrow Z$ definiert durch

$$t(z) := df(g(x))(s(z)) + r(g(z)).$$

Wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{z \longrightarrow x} \frac{\|t(z)\|_3}{\|z - x\|_1} = 0.$$

Da g stetig ist, folgt aus $z \longrightarrow x$ auch $g(z) \longrightarrow g(x)$; und da $df(g(x))$ und $dg(x)$ stetig sind, ist

$$\max(\|dg(x)\|_{op}, \|df(g(x))\|_{op}) = C < \infty.$$

Dies nutzen wir, um zu berechnen

$$\begin{aligned} \lim_{z \longrightarrow x} \frac{\|t(z)\|_3}{\|z - x\|_1} &\leq \lim_{z \longrightarrow x} \frac{\|df(g(x))(s(z))\|_3 + \|r(g(z))\|_3}{\|z - x\|_1} \\ &\leq \lim_{z \longrightarrow x} \frac{C\|s(z)\|_2}{\|z - x\|_1} + \frac{\|r(g(z))\|_3}{\|g(z) - g(x)\|_2} \cdot \frac{\|g(z) - g(x)\|_2}{\|z - x\|_1} \\ &\leq 0 + \lim_{z \longrightarrow x} \frac{\|r(g(z))\|_3}{\|g(z) - g(x)\|_2} \cdot \frac{\|dg(x)(z - x) + s(z)\|_2}{\|z - x\|_1} \\ &\leq \lim_{z \longrightarrow x} \frac{\|r(g(z))\|_3}{\|g(z) - g(x)\|_2} \left(C + \frac{\|s(z)\|_2}{\|z - x\|_1} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist $f \circ g$ in x total differenzierbar und es gilt die behauptete Kettenregel. □

Bemerkung 3.6. Ist $V = \mathbb{R}^k, W = \mathbb{R}^m, Z = \mathbb{R}^n$, so bedeutet die Kettenregel für die Einträge der Jacobi-Matrizen

$$\frac{\partial (f \circ g)^i}{\partial x^j}(x) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f^i}{\partial y^l}(g(x)) \cdot \frac{\partial g^l}{\partial x^j}(x).$$

◇

Das Differential von f ist eine lineare Abbildung, also verhält es sich unter Basiswechseln wie in Mathematik für Physiker I für lineare Abbildungen beschrieben. Wir können auch höhere Ableitungen beschreiben.

Definition 3.7. *Seien $(V, \|.\|_1), (W, \|.\|_2)$ reelle normierte Vektorräume und $U \subset V$ offen. Wir definieren rekursiv für $k \geq 2$: Eine Abbildung $f : U \longrightarrow W$ heißt k-mal total oder Fréchet-differenzierbar, wenn sie $k-1$-mal total differenzierbar ist und das $(k-1)$-fache iterierte Differential*

$$d^{k-1}f : U \longrightarrow L(V, L(V, \dots L(V, W) \dots))$$

total differenzierbar ist (auf der rechten Seite stehen $k-1$ mal "L"). Sind V und W endlich-dimensional, so ist dafür hinreichend, dass nach Wahl von Basen alle k-fachen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^k f^i}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_k}}(x)$$

existieren und in x stetig sind.

Satz 3.8. (Satz von Taylor) *Sei V ein normierter Vektorraum, $U \subset V$ offen und konvex, $x \in U$ und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig differenzierbar, so gilt für alle $z \in U$*

$$f(z) = f(x) + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} d^m f(x) \underbrace{(z-x) \dots (z-x)}_{m \text{ Argumente}} + R_{k+1}(z) \tag{2}$$

mit

$$R_{k+1}(z) = \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k d^{k+1} f(x + t(z-x)) \underbrace{(z-x) \dots (z-x)}_{k+1 \text{ Argumente}} dt.$$

Nach Wahl einer Basis von endlich-dimensionalem V schreibt sich diese Formel auch als

$$f(z) = f(x) + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \dots, i_m = 1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_m}}(x) \cdot (z^{i_1} - x^{i_1}) \cdots (z^{i_m} - x^{i_m}) + R_{k+1}(z)$$

mit

$$R_{k+1}(z) = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_{k+1} = 1}^{n} \int_0^1 (1-t)^k \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{k+1}}}(x + t(z-x)) dt \cdot (z^{i_1} - x^{i_1}) \cdots (z^{i_{k+1}} - x^{i_{k+1}}).$$

Beweis. Man erhält die Aussage das Satzes, indem man die Funktion auf die Verbindungsgerade zwischen x und z parametrisiert durch $t \mapsto x + t(z-x)$ einschränkt und dafür die eindimensionale Taylorformel zusammen mit der Kettenregel (und der integralen Restglieddarstellung) anwendet. □

Bemerkung 3.9. Das Restglied kann auch in der üblicheren Zwischenstellen-Darstellung geschrieben werden: Zu jedem $z \in U$ existiert $\tau \in [0, 1]$, so dass

$$R_{k+1}(z) = \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(x + \tau(z-x)) \underbrace{(z-x) \dots (z-x)}_{k+1 \text{ Argumente}}$$

bzw.

$$R_{k+1}(z) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{k+1} = 1}^{n} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{k+1}}}(x + \tau(z-x)) \cdot (z^{i_1} - x^{i_1}) \cdots (z^{i_{k+1}} - x^{i_{k+1}}).$$

Wir werden aber an späterer Stelle die integrale Restglieddarstellung benötigen. ◇

Korollar 3.10. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, $U \subset V$ offen, $x \in U$ und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann existiert genau ein Polynom P_k in n Variablen und vom Grad höchstens k, also $P_k \in \mathbb{R}[y^1, \ldots, y^n]$ und genau eine stetige Funktion $R_{k+1} : U \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass*

$$f(z) = f(x) + P_k(z-x) + R_{k+1}(z)$$

für alle $z \in U$ und

$$\lim_{z \longrightarrow x} \frac{|R_{k+1}(z)|}{\|z-x\|^k} = 0.$$

Beweis. Die Existenz ist durch den Satz von Taylor gesichert. Eindeutigkeit beweist man wie in 3.2(i). □

Die Taylorreihe benutzen wir, um Extrema von Funktionen zu finden.

Definition 3.11. *Sei M ein topologischer Raum. Eine Funktion $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ hat in x ein lokales Maximum, wenn es eine offene Menge $U \subset M$ gibt mit $x \in U$ und*

$$\sup_{y \in U} f(y) = f(x).$$

Entsprechend hat $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ in x ein lokales Minimum, wenn es eine offene Menge $U \subset M$ gibt mit $x \in U$ und

$$\inf_{y \in U} f(y) = f(x).$$

Ein lokales Extremum ist ein lokales Minimum oder Maximum.

Um das differentielle Kriterium für lokale Extrema zu formulieren, benötigen wir noch den Begriff der Definitheit für gewisse Abbildungen.

Definition 3.12. *Sei V ein normierter Vektorraum. Wir nennen eine stetige, lineare Abbildung $\alpha : V \longrightarrow V^* = L(V, \mathbb{R})$ positiv semidefinit, wenn es ein $c \geq 0$ gibt, so dass*

$$\alpha(v)(v) \geq c\|v\|^2 \ \forall\ v \in V.$$

Entsprechend nennen wir sie negativ semidefinit, wenn

$$\alpha(v)(v) \leq -c\|v\|^2 \ \forall\ v \in V.$$

Ist $c > 0$, so lassen wir die Vorsilbe 'semi' weg.

Satz 3.13. *Sei V ein normierter Vektorraum, $U \subset V$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x \in U$.*

(i) *Ist in x ein lokales Maximum von f, so gilt $df(x) = 0$ und $d^2f(x)$ ist negativ semidefinit.*
(ii) *Ist in x ein lokales Minimum von f, so gilt $df(x) = 0$ und $d^2f(x)$ ist positiv semidefinit.*
(iii) *Ist $df(x) = 0$ und $d^2f(x)$ negativ definit, so ist in x ein lokales Maximum von f.*
(iv) *Ist $df(x) = 0$ und $d^2f(x)$ positiv definit, so ist in x ein lokales Minimum von f.*

Beweis. Sei zur Vereinfachung $x = 0$. Ohne Einschränkung (nach Verkleinerung) dürfen wir annehmen, dass U ein Ball in V ist, insbesondere konvex. Die Taylorformel besagt

$$f(z) = f(0) + df(0)(z) + \frac{1}{2} d^2f(\tau z)(z)(z).$$

Nehmen wir an $df(0)(z) \neq 0$. Da f zweimal stetig differenzierbar ist, existiert

$$C := \sup_{\tau \in [0,1]} \|d^2f(\tau z)\|_{op}$$

und für $|t| \leq \frac{|df(0)(z)|}{C\|z\|^2}$ gilt

$$|f(tz) - f(0) - tdf(0)(z)| \leq \frac{C}{2}t^2\|z\|^2 \leq \frac{|t|}{2}|df(0)(z)|,$$

also ist $f(tz)$ zwischen $f(0) + \frac{t}{2}df(0)(z)$ und $f(0) + \frac{3t}{2}df(0)(z)$ für kleine t. Insbesondere wechselt mit dem Vorzeichen von t auch das Vorzeichen von $f(tz) - f(0)$, also kann in $x = 0$ weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum vorliegen.

Ist nun in $x = 0$ ein lokales Maximum und damit $df(0) = 0$, so vereinfacht sich die Taylorformel weiter zu

$$f(z) = f(0) + \frac{1}{2}d^2f(\tau z)(z)(z) \leq f(0),$$

falls $z \in B_\varepsilon(0)$ und $\varepsilon > 0$ klein genug ist, also folgt $d^2f(\tau z)(z)(z) \leq 0$ für alle $z \in B_\varepsilon(0)$, insbesondere gilt für alle $1 > t > 0$ und alle $z \in B_\varepsilon(0)$

$$0 \geq \frac{1}{t^2}d^2f(\tau(t)tz)(tz)(tz) = d^2f(\tau(t)tz)(z)(z),$$

im Limes $t \longrightarrow 0$ also

$$d^2f(0)(z)(z) \leq 0 \ \forall\ z \in V,$$

das heißt, $d^2f(0)$ ist negativ semidefinit.

Genauso behandeln wir den Fall eines lokalen Minimums.

Ist nun andererseits $df(0) = 0$ und $d^2f(0)$ negativ definit, so existiert wegen der Stetigkeit von d^2f ein $\varepsilon > 0$ so, dass $d^2f(z)$ negativ definit ist, wenn $\|z\| < \varepsilon$. Insbesondere ist

$$f(z) = f(0) + \frac{1}{2}d^2f(\tau z)(z)(z) < f(0)$$

für alle $z \in B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ und daher in $x = 0$ ein lokales Maximum von f.

Analog beweisen wir, dass in $x = 0$ ein lokales Minimum ist, wenn $df(0) = 0$ und $d^2f(0)$ positiv definit ist. □

Bemerkung 3.14. Ist $V = \mathbb{R}^n$, so ist die Definitheit von $d^2f(x)$ äquivalent zur entsprechenden Definitheit der sogenannten Hesse-Matrix

$$H_f(x) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x)\right)_{i,j}.$$

◇

Beispiel 3.15. Sei $U = V = \mathbb{R}^2$ und $f(x, y) := x^2 + y^2$. Das notwendige Kriterium $df(x, y) = 0$ berechnet sich als

$$df(x, y) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (2x, 2y) = (0, 0).$$

Also kommt nur $(0, 0)$ als Ort eines Extremums in Frage. Dort gilt

$$d^2f(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat nur positive Eigenwerte (zweimal 2), ist also positiv definit. Daher haben wir in $(0, 0)$ ein lokales Minimum (in diesem Fall sogar ein globales). △

4. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Nun können wir genauer sagen, was Mannigfaltigkeiten sein sollen: etwas, was man lokal so kartieren kann, dass die Kartenwechsel differenzierbar sind. Natürlich brauchen wir es etwas genauer.

Definition 4.1. *Sei V ein normierter Vektorraum.*

(i) *Eine k-fach differenzierbare Mannigfaltigkeit modelliert auf V ist ein zweit-abzählbarer hausdorffscher topologischer Raum M mit einer Überdeckung durch zusammenhängende offene Mengen $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Homöomorphismen*

$$\psi_i : U_i \longrightarrow W_i$$

auf offene Mengen $W_i \subset V$, so dass

$$\psi_{ij} := \psi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \psi_i(U_i \cap U_j)$$

k-mal total differenzierbar sind.

(ii) *Eine 0-fach differenzierbare Mannigfaltigkeit heißt topologische Mannigfaltigkeit; die Bedingungen an die Übergangsabbildungen sind dann automatisch erfüllt, es bleibt also nur die lokale Homöomorphie zu offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ als Bedingung.*

(iii) *Die Abbildungen ψ_i heißen Karten; deren Gesamtheit nennt man einen Atlas. Die Abbildungen ψ_{ij} heißen Kartenwechsel oder Übergangsabbildungen.*

(iv) *Ein maximaler Atlas ist ein Atlas $\mathcal{A}$, so dass jede Karte $\psi : U \longrightarrow W$, für die $\psi \circ \phi^{-1}$ und $\phi \circ \psi^{-1}$ auf ihrem Definitionsbereich k-mal total differenzierbar sind für alle Karten $\phi \in \mathcal{A}$, bereits in $\mathcal{A}$ enthalten ist; er enthält also schon alle Karten, die mit der differenzierbaren Struktur verträglich sind. Deswegen nennt man einen maximalen Atlas auch eine differenzierbare Struktur.*

(v) *Ist $V = \mathbb{R}^n$ und ψ_{ij} k-mal stetig partiell differenzierbar, so heißt M eine n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit.*

(vi) *Ist $V = \mathbb{C}$ und ψ_{ij} holomorph, so heißt M eine komplexe Kurve. Jede komplexe Kurve ist auch eine C^∞-Mannigfaltigkeit.*

(vii) *$(M, \mathcal{A})$ über endlich-dimensionalem V heißt orientiert, wenn M mindestens eine C^1-Mannigfaltigkeit ist und der gegebene Atlas $\mathcal{A}$ erfüllt, dass*

$$\det d\psi_{ij}(x) > 0$$

für alle $i, j \in I$ und $x \in \psi_j(U_i \cap U_j)$. Die C^1-Mannigfaltigkeit M heißt orientierbar, wenn es einen Teilatlas des maximalen Atlasses gibt, so dass M mit diesem Teilatlas orientiert ist.

(viii) *Sind M, N k-fach differenzierbare Mannigfaltigkeiten, so heißt eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ differenzierbar, wenn für alle Karten $\psi : U \longrightarrow W, \phi : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{W}$ mit $f(U) \subset \tilde{U}$ die Abbildung*

$$\phi \circ f \circ \psi^{-1} : W \longrightarrow \tilde{W}$$

k-mal total differenzierbar ist. Ist f zusätzlich bijektiv und f^{-1} differenzierbar, so heißt f ein Diffeomorphismus. Die Urbilder von Punkten $f^{-1}(y) = \{x \in M | \; f(x) = y\}$ (mit $y \in N$) werden Fasern genannt.

(ix) *Gegeben differenzierbare Mannigfaltigkeiten M, N, S und differenzierbare Abbildungen $\pi : M \longrightarrow S, \tilde{\pi} : N \longrightarrow S$, heißen (M, π) und $(N, \tilde{\pi})$ diffeomorph über S, wenn es einen Diffeomorphismus $f : M \longrightarrow N$ gibt, so dass $\tilde{\pi} \circ f = \pi$; das heißt Fasern von π werden auf Fasern von $\tilde{\pi}$ abgebildet.*

(x) *Ebenso sind die Begriffe von k-mal stetig differenzierbaren und holomorphen Abbildungen in einem geeigneten Umfeld definiert. Eine bijektive, holomorphe Abbildung mit holomorpher Inverse heißt biholomorph.*

(xi) *Ist M eine C^k-Mannigfaltigkeit, so notiert man*

$$C^k(M) := \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} |\ f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar } \}.$$

(xii) *Die Dimension von M soll die Dimension des zugrundeliegenden Vektorraums V sein. Man notiert* $\dim M := \dim V$.

Bemerkung 4.2. Ein Mathematiker würde Mannigfaltigkeiten gerne klassifizieren, also moeglichst mit Hilfe endlich vieler Zahlen eindeutig beschreiben. Dies ist in begrenztem Maße möglich (, aber natürlich nicht Ziel dieser Vorlesung). Um zu verstehen, welcher Natur diese Invarianten sein müssen, bemerken wir zunächst, dass nach Definition jede Mannifaltigkeit lokal wie eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$ aussieht, insbesondere hat jeder Punkt eine Umgebung, die wie ein Ball im $\mathbb{R}^n$ aussieht. Daraus folgt, dass die einzige lokale Invariante die Dimension der Mannigfaltigkeit ist, alle anderen geometrischen Invarianten müssen von der globalen Struktur der Mannigfaltigkeit abhängen. Solche Invarianten sind zum Beispiel die Anzahlen von gewissen Löchern. In jedem Falle müssen wir Objekte definieren, die auf der gesamten Mannigfaltigkeit leben. Dazu wenden wir die uns bekannten Konzepte der linearen Algebra und Analysis in jedem Punkt an. Dies zu erklären ist das Ziel des restlichen ersten Kapitels. $\diamond$

Beispiel 4.3. (i) Offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ werden durch $\psi = \mathrm{id}$ zu orientierten C^∞-Mannigfaltigkeiten.

(ii) Graphen von Funktionen: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Der Graph $M := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} |\ x \in U\}$ ist eine C^∞-Mannigfaltigkeit, indem man die von $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierte Topologie nimmt und als (einzige) Karte

$$\psi : M \longrightarrow U, (x, y) \mapsto x.$$

Zunächst muss man nachrechnen, dass ψ ein Homöomorphismus ist. Ist $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, so ist

$$\psi^{-1}(V) = M \cap \{(x, y) |\ x \in V\}.$$

Nach Definition der Relativtopologie ist damit $\psi^{-1}(V)$ offen, also ψ stetig. ψ ist injektiv, denn sind $(x, y), (x', y') \in M$, d.h. $y = f(x), y' = f(x')$ und $x = x'$, so folgt $y = y'$. Die Abbildung ψ ist nach Konstruktion auch surjektiv. Die Umkehrabbildung ist

$$\psi^{-1}(x) = (x, f(x))$$

und daher ebenfalls stetig.

Die einzige Übergangsabbildung ist $\psi \circ \psi^{-1} = \mathrm{id}$; diese ist unendlich oft differenzierbar und $\det d\mathrm{id}(x) = 1 > 0$, also ist M eine orientierte C^∞-Mannigfaltigkeit; und $\psi : M \longrightarrow U$ ist ein Diffeomorphismus.

Dasgleiche gilt für Graphen stetiger Abbildungen $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$.

(iii) Die Riemannsche Zahlenkugel: Wir überdecken $\mathbb{C}_\infty$ mit zwei offenen Mengen

$$U_1 := \mathbb{C},\ U_2 := \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$$

und nehmen die Karten

$$\psi_1 = \mathrm{id}, \psi_2 : \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z},$$

wobei $\frac{1}{\infty} = 0$ zu verstehen ist. Die Übergangsabbildung

$$\psi_{12} = \psi_1 \circ {\psi_2}^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto \frac{1}{z}$$

ist holomorph, also ist $\mathbb{C}_\infty$ eine komplexe Kurve; damit auch eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Das (reelle) Differential der Übergangsabbildung

$$\psi_{12}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

ist

$$d\psi_{12}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Daraus errechnet sich $\det d\psi_{12}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} > 0$, also ist die Riemannsche Zahlenkugel orientiert.

(iv) Sphären: Sei $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \, |x| = 1\}$ versehen mit der Relativtopologie bezüglich $\mathbb{R}^{n+1}$. Damit ist sie hausdorffsch und zweitabzählbar. Auch hier überdecken wir mit zwei Karten: Die offenen Mengen sind die Sphäre ohne Nordpol bzw. Südpol, d.h.

$$U_1 := S^n \setminus \{e_1\}, \; U_2 := S^n \setminus \{-e_1\}.$$

Die beiden Mengen sind offen, weil $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\pm e_1\}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ offen sind und U_1, U_2 als Schnitt dieser beiden Mengen mit S^n erhalten wird. Die zugehörigen Kartenabbildungen sollen die stereographischen Projektionen vom Nord- bzw. Südpol sein, d.h.

$$\psi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \frac{1}{1-x_1}(x_2, \ldots, x_{n+1})$$

und

$$\psi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \frac{1}{1+x_1}(x_2, \ldots, x_{n+1}).$$

Es ist einfach nachzurechnen, dass ψ_1, ψ_2 Homöomorphismen sind. Die Inversen sind

$$\psi_1^{-1}(z) = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}e_1 + \frac{2}{|z|^2+1}(0,z), \; \psi_2^{-1}(z) = -\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}e_1 + \frac{2}{|z|^2+1}(0,z).$$

Daraus errechnet sich die Übergangsabbildung

$$\psi_{12} := \psi_1 \circ \psi_2^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

als

$$\psi_{12}(z) = \frac{z}{|z|^2}.$$

Dies ist die Inversion an der S^{n-1}. Insbesondere sieht man, dass $\psi_{12} = \psi_{21}$ und ψ_{12} ist unendlich oft differenzierbar und es gilt

$$\det d\psi_{12}(z) = -\frac{1}{|z|^{2n}} < 0.$$

Damit wird S^n zu einer C^∞-Mannigfaltigkeit, die aber noch nicht orientiert ist. Indem man nun beispielsweise die Karte ψ_1 ersetzt durch

$$\tilde{\psi}_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \frac{1}{1-x_1}(-x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}),$$

erhält man einen orientierten Atlas. Da $\tilde{\psi}_1$ Element des maximalen Atlas ist, der von ψ_1, ψ_2 erzeugt wird, ist S^n eine orientierbare Mannigfaltigkeit.

Die Abbildung

$$f : S^2 \longrightarrow \mathbb{C}_\infty, z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{1-x_1}(x_2 + ix_3) & , \text{falls } x_1 \neq 1 \\ \infty & , \text{falls } x_1 = 1 \end{cases}$$

ist ein Diffeomorphismus von C^∞-Mannigfaltigkeiten. Zunächst ist klar, dass f bijektiv ist. Seien nun $\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}, i = 1,2$ die beiden Karten von $\mathbb{C}_\infty$ und $\psi_i : W_i \longrightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}, i = 1,2$ die beiden Karten von S^2. Wir müssen nachweisen, dass

$$\begin{aligned}
f_{11} := \phi_1 \circ f \circ \psi_1^{-1} &\ :\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\\
f_{12} := \phi_1 \circ f \circ \psi_2^{-1} &\ :\ \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}\\
f_{21} := \phi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1} &\ :\ \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}\\
f_{22} := \phi_2 \circ f \circ \psi_2^{-1} &\ :\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}
\end{aligned}$$

und deren Inverse unendlich oft differenzierbar sind. Man rechnet aber nach

$$f_{11}(z) = z, f_{12}(z) = \frac{1}{\overline{z}}, f_{21}(z) = \frac{1}{z}, f_{22}(z) = \overline{z}.$$

Damit ist der Beweis erbracht, dass S^2 und $\mathbb{C}_\infty$ zueinander diffeomorph sind.

(v) Sphären bezüglich beliebiger Normen tragen ebenfalls eine differenzierbare Struktur: Sei $\|.\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^{n+1}$ und

$$M := \{z \in \mathbb{R}^{n+1} |\ \|z\| = 1\}$$

versehen mit der Relativtopologie. Die Abbildung

$$\phi : M \longrightarrow S^n, z \mapsto \frac{z}{|z|}$$

ist ein Homöomorphismus. Nimmt man als Karten von M

$$\tilde{\psi}_i : \tilde{U}_i \longrightarrow \mathbb{R}^n, \tilde{\psi}_i(z) := \psi_i \circ \phi(z),$$

wobei $\psi_i, i = 1,2$ die Karten von S^n sind und $\tilde{U}_i := \phi^{-1}(U_i)$, so gilt

$$\tilde{\psi}_{12} = \tilde{\psi}_1 \circ \tilde{\psi}_2^{-1} = \psi_1 \circ \psi_2^{-1} = \psi_{12},$$

also wird M damit eine orientierte C^∞-Mannigfaltigkeit. Insbesondere gilt dies für den Würfel, den man durch $\|.\| := \|.\|_\infty$ und den Rhombus, das man durch $\|.\| := \|.\|_1$ erhält. Unsere Wahl der Karten hat deren Kanten also geglättet.

(vi) Reell- und komplex-projektive Räume: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir nennen zwei Punkte $x, y \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ äquivalent, wenn sie auf einer ($\mathbb{K}$)-Geraden durch 0 liegen, d.h., wenn es $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gibt, so dass $x = \lambda y$. Die Menge der Äquivalenzklassen, also die Menge aller Geraden in $\mathbb{K}^{n+1}$, heißt projektiver Raum und wird mit $\mathbb{K}P^n$ bezeichnet. Wir haben also die natürliche Projektion

$$\pi : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{K}P^n.$$

Die Topologie auf $\mathbb{K}P^n$ soll die Quotiententopologie sein. Die Hausdorffeigenschaft ist zwar nicht selbstverständlich, macht man sich aber hier schnell klar. Da für offene $U \subset \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \{\lambda z |\ \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, z \in U\}$$

wieder offen ist, drückt sich auch die Zweitabzählbarkeit nach unten durch: Ist $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Basis der Topologie von $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$, so sind $(\pi(U_i))_{i \in \mathbb{N}}$ wieder offen und eine Basis der Topologie von $\mathbb{K}P^n$.

Wir schreiben die Äquivalenzklasse eines Punktes $(x_0, \ldots, x_n)$ als $[x_0 : \cdots : x_n]$. Als Karten nehmen wir die Abbildungen

$$\psi_i : U_i := \mathbb{K}P^n \setminus \{x_i = 0\} \longrightarrow \mathbb{K}^n, [x_0 : \cdots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

für $i = 0, \dots, n$. Diese sind offenbar Homöomorphismen. Die Kartenwechsel

$$\psi_{ij} = \psi_i \circ \psi_j^{-1} : \mathbb{K}^n \setminus \{z_i = 0\} \longrightarrow \mathbb{K}^n \setminus \{z_j = 0\}$$

sind gegeben durch

$$\psi_{ij}(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{z_1}{z_{i+1}}, \dots, \frac{z_i}{z_{i+1}}, \frac{z_{i+2}}{z_{i+1}}, \dots, \frac{z_j}{z_{i+1}}, \frac{1}{z_{i+1}}, \frac{z_{j+1}}{z_{i+1}}, \dots, \frac{z_n}{z_{i+1}} \right)$$

(hier für $i < j$), insbesondere unendlich oft differenzierbar. Dadurch werden $\mathbb{R}P^n$ und $\mathbb{C}P^n$ zu C^∞-Mannigfaltigkeiten. (Man sieht, dass für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die ψ_{ij} nur von den z_k, nicht aber von den $\overline{z}_k$ abhängen. In diesem Sinne sind die ψ_{ij} holomorph und machen $\mathbb{C}P^n$ zu einer "komplexen Mannigfaltigkeit".)

Dies sind die ersten Beispiele von Mannigfaltigkeiten, die keine (natürliche) Anschauung als Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ haben. Eine Ausnahme bilden $\mathbb{R}P^1$ und $\mathbb{C}P^1$.

Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}P^1 \longrightarrow S^1, [x_0 : x_1] \longrightarrow (\frac{x_0^2 - x_1^2}{x_0^2 + x_1^2}, \frac{2x_0x_1}{x_0^2 + x_1^2})$$

ist wohldefiniert (unabhängig von der Auswahl eines Repräsentanten von $[x_0 : x_1]$) und ein Diffeomorphismus Dies nachzurechnen überlassen wir dem Leser als Übung. Bemerken wir nur, dass f auch durch

$$f([\cos\varphi : \sin\varphi]) = (\cos 2\varphi, \sin 2\varphi)$$

bechrieben werden kann.

Schließlich ist die Abbildung

$$g : \mathbb{C}P^1 \longrightarrow \mathbb{C}_\infty, [z_0 : z_1] \mapsto \begin{cases} \frac{z_1}{z_0} & \text{, falls } z_0 \neq 0 \\ \infty & \text{, falls } z_0 = 0 \end{cases}$$

eine biholomorphe Abbildung zwischen komplexen Kurven. Auch dies verbleibt als Übung. Insbesondere ist $\mathbb{C}P^1$ diffeomorph zu S^2.

Die Orientierbarkeit der $\mathbb{R}P^n$ und $\mathbb{C}P^n$ werden wir später diskutieren.

(vii) Der Torus kann natürlich als Donut im $\mathbb{R}^3$ visualisiert werden. Eine andere Herangehensweise ist jedoch hilfreicher: Wir nehmen ein Rechteck und kleben gegenüberliegende Seiten zusammen. Mathematisch kann man dies in beliebigen Dimensionen folgendermaßen tun: Zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ werden identifiziert, wenn $x - y \in \mathbb{Z}^n$. Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit T^n bezeichnet. Wieder hat man also eine Projektion

$$\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow T^n$$

und wir nehmen auf T^n die Quotiententopologie. Erneut ist sie hausdorffsch und zweitabzählbar. Offenbar gibt es zu jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\pi|_{B_\varepsilon(x)} : B_\varepsilon(x) \longrightarrow \pi(B_\varepsilon(x))$$

ein Homöomorphismus ist. Wir wollen sehen, dass

$$\mathcal{A} := \{(U, \psi) |\ \exists W \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, s.d. } \pi|_W : W \longrightarrow U \text{ ist ein Homöomorphismus }, \psi = (\pi|_W)^{-1}\}$$

ein C^∞-Atlas von T^n ist. Sind $(U_i, \psi_i), (U_j, \psi_j) \in \mathcal{A}$, so ist

$$\psi_{ij} : \psi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \psi_i(U_i \cap U_j))$$

nach Konstruktion stetig und es gilt

$$\pi \circ \psi_{ij}(x) = \pi \circ (\pi|_{W_i})^{-1} \circ \pi(x) = \pi(x)$$

für alle x, also existiert zu jeder Zusammenhangskomponente W_{ijk} von $\psi_j(U_i \cap U_j)$ eine Konstante $c_{ijk} \in \mathbb{Z}^n$, so dass

$$\psi_{ij}(x) = x + c_{ijk}$$

für alle $x \in W_{ijk}$. Insbesondere sind die ψ_{ij} unendlich oft differenzierbar und $d\psi_{ij}(x) = \mathrm{id}$ stets. Damit ist T^n eine orientierte C^∞-Mannigfaltigkeit.

(viii) Matrixgruppen bilden oftmals C^∞-Mannigfaltigkeiten. $Gl(n, \mathbb{K})$ ist zum Beispiel als offene Menge des $\mathbb{R}^{n^2}$ eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Aber auch beispielsweise $SO(n)$ und $SU(n)$ sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Dies zu sehen wird später einfacher sein. Allgemeiner kann man feststellen: Wüsste man von einer abgeschlossenen Matrixgruppe G, dass

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

surjektiv ist, so könnte man lokale Inverse von exp als Karten nehmen und erhielte eine C^∞-Mannigfaltigkeit G (modelliert auf $\mathfrak{g}$).

(ix) Das Möbiusband Wir definieren das Möbiusband durch

$$M := \{(x, y, [u : v]) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 |\ xv = yu\}$$

ausgestattet mit der differenzierbaren Struktur $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$:

$$U := M \cap \{u \neq 0\}, \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, [u : v]) \mapsto (\tfrac{v}{u}, x)$$
$$V := M \cap \{v \neq 0\}, \psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, [u : v]) \mapsto (\tfrac{u}{v}, y).$$

Wir werden später sehen, dass es nicht orientierbar ist.

△

Es gibt ein paar elementare Konstruktionen, um aus bekannten Mannigfaltigkeiten neue zu konstruieren.

Konstruktion 4.4. (i) Das Produkt $M \times M' = \{(x, y) | x \in M, y \in M'\}$ zweier Mannifaltigkeiten M, M' ist wieder eine Mannigfaltigkeit (gleicher Regularität), indem man die Produkte der Karten betrachtet: Ist $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte von M und $\psi' : U' \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Karte von M', so bilden die Karten

$$\psi \times \psi' : U \times U' \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}, (x, y) \mapsto (\psi(x), \psi'(y))$$

einen Atlas von $M \times M'$.

(ii) Zusammenhängende Summe: Die Idee ist, zwei Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension zusammenzukleben. Dies tut man, indem man aus jeder Mannigfaltigkeit eine kleine Kugel (der gleichen Dimension) herausschneidet und die beiden entstehenden Ränder identifiziert. Tun wir das genauer. Seien M, M' zwei topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension n und $\psi : U \longrightarrow W, \psi' : U' \longrightarrow W'$ zwei Karten von M bzw. M', so dass

$$W = W' = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n.$$

Wir konstruieren

$$M \# M' := ((M \setminus \psi^{-1}(B_{\frac{1}{2}}(0))) \cup (M' \setminus \psi'^{-1}(B_{\frac{1}{2}}(0))))/\sim,$$

wobei hier $/ \sim$ bedeuten soll, dass für $z \in \partial B_{\frac{1}{2}}(0)$ die Punkte

$$\psi^{-1}(z) \text{ und } \psi'^{-1}(z)$$

identifiziert werden. Wir haben also ein Abbildung

$$\pi : (M \setminus \psi^{-1}(B_{\frac{1}{2}}(0))) \cup (M' \setminus \psi'^{-1}(B_{\frac{1}{2}}(0))) \longrightarrow M \# M'$$

und können dementsprechend $M \# M'$ wieder mit der Quotiententopologie versehen. Diese ist hausdorffsch und zweitabzählbar. Karten von $M \# M'$ erhalten wir, indem wir für jede

Karte $\tilde{\psi} : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{W}$ von M die Einschränkung $\tilde{\psi}|_{\tilde{U}\setminus\psi^{-1}(\overline{B_{\frac{1}{2}}(0)})}$ als neue Karte nehmen. Analoges tun wir für Karten von M'. Nun fehlt nur noch eine Karte um die Klebestellen

$$\psi^{-1}(\partial B_{\frac{1}{2}}(0)) = \psi'^{-1}(\partial B_{\frac{1}{2}}(0)) \subset M\#M'.$$

Sei dazu

$$V := (\psi^{-1}(B_1(0) \setminus B_{\frac{1}{2}}(0)) \cup \psi'^{-1}(B_1(0) \setminus B_{\frac{1}{2}}(0)))/\sim \subset M\#M'.$$

Nach Konstruktion ist V offen und die Abbildung

$$\phi : V \longrightarrow B_1(0) \setminus \overline{B_{\frac{1}{4}}(0)}, x \mapsto \begin{cases} \psi(x) & \text{, falls } x \in \psi^{-1}(B_1(0) \setminus B_{\frac{1}{2}}(0)) \\ \frac{\psi'(x)}{4|\psi'(x)|^2} & \text{, falls } x \in \psi'^{-1}(B_1(0) \setminus B_{\frac{1}{2}}(0)) \end{cases}$$

ein Homöomorphismus. Damit wird also $M\#M'$ wieder eine topologische Mannigfaltigkeit.

Diese Konstruktion hängt zwar von der Wahl der Karten ψ und ψ' ab, aber es gibt nur zwei Möglichkeiten für $M\#M'$.

Die Klebekanten können so geglättet werden, dass $M\#M'$ eine C^r-Mannigfaltigkeit wird, wenn es M und M' waren. Hierbei gibt es eine natürliche Wahl der differenzierbaren Struktur.

Sind M und M' orientierbare C^r-Mannigfaltigkeiten mir $r \geq 1$, so macht die Bedingung, dass $M\#M'$ ebenfalls orientierbar sein soll, die Konstruktion vollständig unabhängig von der Wahl der Karten ψ und ψ'.

Betrachten wir noch kurz den Fall $M = S^n$. Ist ψ ein Halb mal die stereographische Projektion vom Nordpol, so ist $S^n \setminus \psi^{-1}(B_{\frac{1}{2}(0)})$ genau die Nordhalbkugel; diese ist (z.B. als Graph) diffeomorph zur Einheitskreisscheibe. Das heißt, wir schneiden aus M' eine Kreisscheibe heraus und setzen wieder eine Kreisscheibe ein. Damit gilt

$$S^n\#M' = M'$$

für alle orientierbaren Mannigfaltigkeiten M'.

△

5. Der Tangentialraum an C^∞-Mannigfaltigkeiten

Einem Tangentialraum sind wir schon beim Thema Lie-Gruppen im zweiten Semester begegnet. Einem ähnlichen Konzept begegnen wir auch hier. Jedoch haben wir im Gegensatz zu Matrixgruppen keine natürliche Einbettung in einen $\mathbb{R}^m$ gegeben. Wir müssen daher lernen, was 'Tangentialrichtungen' auf einer Mannigfaltigkeit tun.

Dazu benötigen wir zunächst den Begriff des Keims einer Funktion.

Definition 5.1. *Ist M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $x \in M$, so definieren wir*

$$C^\infty_{M,x} := (\bigcup_{U \ni x, U \text{ offen}} C^\infty(U))/\sim,$$

wobei $\sim$ hier folgende Äquivalenzrelation ist: zwei Funktionen $f \in C^\infty(U), g \in C^\infty(U')$ mit $x \in U \cap U'$ werden identifiziert, wenn es eine offene Menge $V \subset U \cap U'$ mit $x \in V$ gibt, so dass $f|_V = g|_V$. Die Äquivalenzklassen $[f]$, also die Elemente von $C^\infty_{M,x}$, werden Keime der Funktion f in x genannt. $C^\infty_{M,x}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und für $f \in C^\infty(U), g \in C^\infty(U')$ ist die Äquivalenklasse von $fg \in C^\infty(U \cap U')$ nur von $[f]$ und $[g]$ abhängig, das heißt

$$[f] \cdot [g] := [fg]$$

definiert eine Multiplikation auf $C^\infty_{M,x}$.

Wenn klar ist, dass eine Eigenschaft von f nur von f auf einer beliebig kleinen Umgebung um x abhängt, so werden wir stillschweigend f mit $[f]$ identifizieren. Dies gilt insbesondere für Ableitungen im Punkt x.

Definition 5.2. *Ist M eine C^∞-Mannigfaltigkeit modelliert auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ und $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte, so nennen wir $x^i := \psi^i(x)$ die i-te Koordinate von x (bezüglich ψ). Die Koordinaten von $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir hier mit X^i; es gilt also $x^i = X^i \circ \psi$. Jede differenzierbare Funktion $f \in C^1(U)$ besitzt die 'partiellen Ableitungen'*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) := \frac{\partial (f \circ \psi^{-1})}{\partial X^i}(\psi(x)).$$

Die partiellen Ableitungen messen, wie sehr sich f ändert, wenn man ein kleines bißchen in x^i-Richtung auf der Mannigfaltigkeit weitergeht. Stellt man sich M als Fläche im $\mathbb{R}^3$ vor, so korrespondieren die partiellen Ableitungen für unbestimmtes f zu speziellen Richtungen, die tangential an der Mannigfaltigkeit in x liegen. Die partiellen Ableitungen sollen also unsere oben genannten 'Tangentialrichtungen' werden.

Beispiel 5.3. Wir betrachten auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Funktion

$$f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(z^1, z^2, z^3) := z^1.$$

In den oben konstruierten Karten $\psi_{1/2} : S^2 \setminus \{(\pm 1, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} f \circ \psi_1^{-1}(u, v) &= \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \\ f \circ \psi_2^{-1}(u, v) &= -\frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \end{aligned}$$

Beide Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}^2$ unendlich oft differenzierbar, also ist $f \in C^\infty(S^2)$ und die partiellen Ableitungen berechnen sich wie folgt: Bezeichne x^1, x^2 die Koordinaten von ψ_1 und y_1, y_2 die Koordinaten von ψ_2. Im Punkt $z = (z^1, z^2, z^3) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^1}(z) &= \frac{\partial (f \circ \psi_1^{-1})}{\partial u}(\psi_1(z)) \\ &= \frac{\partial \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}}{\partial u}\Big|_{u=\frac{z^2}{1-z^1}, v=\frac{z^3}{1-z^1}} \\ &= \frac{4u}{(u^2 + v^2 + 1)^2}\Big|_{u=\frac{z^2}{1-z^1}, v=\frac{z^3}{1-z^1}} \\ &= \frac{4z^2(1 - z^1)^3}{((z^2)^2 + (z^3)^2 + (1 - z^1)^2)^2} \\ &\overset{z \in S^2}{=} \frac{4z^2(1 - z^1)^3}{4(1 - z^1)^2} \\ &= z^2(1 - z^1) \end{aligned}$$

Analog berechnet man

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(z) = z^3(1 - z^1)$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y^1}(z) &= -z^2(1 + z^1) \\ \frac{\partial f}{\partial y^2}(z) &= -z^3(1 + z^1). \end{aligned}$$

△

Eine Karte induziert also Abbildungen (bzw. "Operatoren")

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x : C^\infty_{M,x} \longrightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$$

mit den Eigenschaften

(i) $\frac{\partial}{\partial x^i}|_x(fg) = f(x)\frac{\partial}{\partial x^i}|_x(g) + g(x)\frac{\partial}{\partial x^i}|_x(f)$,

(ii) $\frac{\partial}{\partial x^i}|_x(f+g) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_x(f) + \frac{\partial}{\partial x^i}|_x(g)$

für alle $f, g \in C^\infty_{M,x}$.

Aus der ersten Eigenschaft folgt automatisch $\frac{\partial}{\partial x^i}|_x(cf) = c\frac{\partial}{\partial x^i}|_x(f)$ für alle Konstanten $c \in \mathbb{R}$, also ist $\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, für die die Produktregel gilt.

Es ist leicht nachzurechnen, dass $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ für $a_i \in \mathbb{R}$ wieder ein $\mathbb{R}$-linearer Operator wird, der die Produktregel erfüllt. Die Frage ist: Gibt es noch mehr als nur diese?

Wir definieren zunächst

Definition 5.4. *Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Der $\mathbb{R}$-Vektorraum*

$$T_xM := \{D : C^\infty_{M,x} \longrightarrow \mathbb{R} |\ D \textit{ ist } \mathbb{R}\textit{-linear und erfüllt } D(fg) = f(x)D(g) + g(x)D(f)\}$$

heißt Tangentialraum von M in x.

Bemerkung 5.5. Für jedes $D \in T_xM$ gilt $D(1) = 0$, denn nach der Produktregel gilt

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) + D(1),$$

also $D(1) = 0$. Dies ist konsistent mit der Herleitung durch partielle Ableitungen. ◇

Nun beantworten wir die gestellte Frage.

Lemma 5.6. *Ist M eine C^∞-Mannigfaltigkeit, $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte und $x \in U$, so ist $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_x\}$ eine Basis von T_xM. Insbesondere ist $\dim T_xM = \dim M$.*

Beweis. Zunächst wollen wir zeigen, dass $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_x\}$ linear unabhängig sind. Nehmen wir also an, es gilt

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x = 0,$$

das heißt

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = 0$$

für alle $f \in C^\infty_{M,x}$. Insbesondere gilt die Gleichung für die Koordinatenfunktionen x^j. Dies bedeutet

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_j$$

für alle $j = 1, \ldots, n$. Damit sind die partiellen Ableitungen linear unabhängig.

Sei nun $D \in T_xM$ und $a^i := D(x^i) \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz von Taylor – der sich nach Definition der partiellen Ableitungen wortwörtlich auf Mannigfaltigkeiten überträgt – mit integraler Restglieddarstellung des Terms zweiter Ordnung gilt für alle offenen Mengen $\tilde{U} \subset U$, $f \in C^\infty(\tilde{U})$ und $z \in \tilde{U}$

$$f(z) = f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(z)(x^i(z) - x^i(x)) + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(z) \cdot (x^i(z) - x^i(x)) \cdot (x^j(z) - x^j(x))$$

mit

$$\alpha_{ij}(z) = \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\left(\psi_1^{-1}(\psi_1(x) + t(\psi_1(z) - \psi_1(x)))\right) dt.$$

Die genaue Gestalt von α_{ij} ist nicht wichtig. Darauf wenden wir D an und erhalten nach der Produktregel

$$D(f) = 0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) D(x^i) + 0 = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x(f).$$

Alle andere Terme der Produktregel verschwinden, da nach Auswertung in $z = x$ immer ein 0-Faktor vorkommt. Also gilt

$$D = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x,$$

das heißt, dass $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_x\}$ den Vektorraum T_xM erzeugt. □

Bemerkung 5.7. Ist $M = U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so ist $\mathrm{id} : U \longrightarrow U$ eine natürliche Karte und

$$\iota : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_xM, a \mapsto \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$$

ein Isomorphismus für alle $x \in U$. In diesem Sinne schreiben wir $T_xU = \mathbb{R}^n$ für alle $x \in U \subset \mathbb{R}^n$. ◇

Natürlich wollen wir auch hier wissen, wie sich die Basis von T_xM ändert, wenn sich die Karte ändert:

Proposition 5.8. *Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $\psi : U \longrightarrow M, \psi' : U' \longrightarrow M$ Karten mit $x \in U \cap U'$. Schreiben wir wieder $x^i := \psi^i, y^i := \psi'^i$, so gilt*

$$\frac{\partial}{\partial y^i}|_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}|_x.$$

Beweis. Sei $f \in C^\infty_{M,x}$. Wir berechnen mit Hilfe der Kettenregel im $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y^i}(x) &= \frac{\partial (f \circ \psi'^{-1})}{\partial Y^i}(\psi'(x)) \\
&= \frac{\partial (f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \psi'^{-1})}{\partial Y^i}(\psi'(x)) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial (f \circ \psi^{-1})}{\partial X^j}(\psi(x)) \cdot \frac{\partial (\psi \circ \psi'^{-1})^j}{\partial Y^i}(\psi'(x)) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) \cdot \frac{\partial \psi^j}{\partial y^i}(x) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(x) \frac{\partial f}{\partial x^j}(x).
\end{aligned}$$

Da dies für alle f gilt, ist die behauptete Gleichung bewiesen. □

Beispiel 5.9. Wir führen das Beispiel 5.3 fort. Um der Systematisierung willen notieren wir hier $X^1 := u, X^2 := v$. Beachte, dass sich die Ableitungen $\frac{\partial x^j}{\partial y^i}$ durch Differentiation der

Übergangsabbildungen ergeben:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x^j}{\partial y^i}(z) &= \frac{\partial \psi_{12}^j}{\partial X^i}\left(\frac{z^2}{1+z^1}, \frac{z^3}{1+z^1}\right) \\
&= \frac{\partial \frac{X^j}{(X^1)^2+(X^2)^2}}{\partial X^i}\left(\frac{z^2}{1+z^1}, \frac{z^3}{1+z^1}\right) \\
&= \frac{\delta_{ij}}{(X^1)^2+(X^2)^2} - \frac{2X^iX^j}{((X^1)^2+(X^2)^2)^2}\Big|_{X^1=\frac{z^2}{1+z^1}, X^2=\frac{z^3}{1+z^1}} \\
&= \frac{(1+z^1)^2}{(z^2)^2+(z^3)^2}\cdot\delta_{ij} - \frac{2z^{i+1}z^{j+1}(1+z^1)^2}{((z^2)^2+(z^3)^2)^2} \\
&\overset{z\in S^2}{=} \frac{1+z^1}{1-z^1}\cdot\delta_{ij} - 2\frac{z^{i+1}z^{j+1}}{(1-z^1)^2}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich aus der Kettenregel auf Mannigfaltigkeiten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y^1}(z) &= \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial x^j}{\partial y^1}\cdot\frac{\partial f}{\partial x^j}(z) \\
&= \left(\frac{1+z^1}{1-z^1} - 2\frac{(z^2)^2}{(1-z^1)^2}\right)\cdot z^2(1-z^1) - 2\frac{z^2z^3}{(1-z^1)^2}\cdot z^3(1-z^1) \\
&= \frac{z^2}{1-z^1}\left(1-(z^1)^2-2(z^2)^2-2(z^3)^2\right) \\
&\overset{z\in S^2}{=} \frac{z^2}{1-z^1}(-1+(z^1)^2) \\
&= -z^2(1+z^1),
\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit der vorhergehenden Rechnung. Analog verifiziert man die Berechnung der anderen partiellen Ableitungen. △

Der Tangentialraum erlaubt uns nun, das Konzept eines Differentials auf Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern. Im $\mathbb{R}^n$ haben wir gesehen, dass eine differenzierbare Abbildung f zwischen offenen Mengen von Vektorräumen ein lineares Differential df zwischen den Vektorräumen induziert. Das Differential wird also als Linearisierung (= beste lineare Approximation) der Abbildung verstanden. Bei Mannigfaltigkeiten haben wir ein nicht-lineares Objekt mehr: die Mannigfaltigkeit. Wir müssen also erst die Manigfaltigkeit linearisieren - das haben wir gerade mit der Notation des Tangentialraums getan - und dann die Abbildung. Dies geschieht wie folgt:

Definition 5.10. *Eine unendlich oft differenzierbare Abbildung $f : M \longrightarrow N$ zwischen C^∞-Mannigfaltigkeiten M und N induziert eine lineare Abbildung*

$$df(x) : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N, D \mapsto \tilde{D}$$

via

$$\tilde{D}(g) := D(g\circ f)$$

für alle $D \in T_xM, g \in C^\infty_{N,f(x)}$. Diese Abbildung heißt Differential von f in x.

Auch hier gilt die Kettenregel:

Lemma 5.11. (Kettenregel) *Seien L, M, N C^∞-Mannigfaltigkeiten und $g : L \longrightarrow M, f : M \longrightarrow N$ unendlich oft differenzierbare Abbildungen. Die Komposition $f\circ g : L \longrightarrow N$ ist unendlich oft differenzierbar und es gilt die Kettenregel*

$$d(f\circ g)(x) = df(g(x))\circ dg(x)$$

für alle $x \in L$.

Beweis. Die gegebene Definition des Tangentialraumes macht den Beweis sehr einfach. Sei $D \in T_x L$. Nach Definition des Differentials gilt für alle $h \in C^\infty(N)$

$$d(f \circ g)(x)(D)(h) = D(h \circ f \circ g)$$

und

$$df(g(x)) \circ dg(x)(D)(h) = dg(x)(D)(h \circ f) = D(h \circ f \circ g),$$

also sind beide Ausdrücke gleich. □

Wir haben gesehen, dass Differentiale von Abbildungen zwischen offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ in der Jacobimatrix codiert werden können. Dasgleiche wollen wir auch auf Mannigfaltigkeiten tun.

Proposition 5.12. *Sei $f : M \longrightarrow N$ eine unendlich oft differenzierbare Abbildung zwischen C^∞-Mannigfaltigkeiten M, N und $\psi : U \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^n, \tilde{\psi} : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{W} \subset \mathbb{R}^m$ Karten von M bzw. N, so dass $f(U) \subset \tilde{U}$. Wir schreiben wieder $x^i := \psi^i$ und $f^i := (\tilde{\psi} \circ f)^i$ für die Komponenten in den Karten. Dann gilt für die Matrixdarstellung $A = (a_{ij})$ der linearen Abbildung*

$$\varphi := d(\tilde{\psi} \circ f \circ \psi^{-1})(\psi(x)) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

die Gleichung

$$a_{ij} = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x)$$

für alle $x \in L$. Die Matrix A heißt Darstellung von df (bzw. Jacobi-Matrix von f) in den Karten $\psi, \tilde{\psi}$.

Beweis. Nach Bemerkung 5.7 identifizieren wir die Einheitsvektoren von $\mathbb{R}^n$

$$e_i = \frac{\partial}{\partial X^i}|_{\psi(x)}, i = 1, \ldots, n$$

und die von $\mathbb{R}^m$

$$\tilde{e}_i = \frac{\partial}{\partial Y^i}|_{\tilde{\psi}(f(x))}, i = 1, \ldots, m,$$

wobei hier wieder X^i, Y^j die kartesischen Koordinaten von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ sind. Wir berechnen für $h \in C^\infty(\tilde{W})$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^m a_{kj}\tilde{e}_k(h) &= \varphi(e_j)(h) \\
&= d(\tilde{\psi} \circ f \circ \psi^{-1})(\psi(x)) \left(\frac{\partial}{\partial X^j}|_{\psi(x)} \right)(h) \\
&= \frac{\partial(h \circ \tilde{\psi} \circ f \circ \psi^{-1})}{\partial X^j}(\psi(x)) \\
&\overset{3.6}{=} \sum_{k=1}^m \frac{\partial h}{\partial Y^k}(\tilde{\psi} \circ f(x)) \cdot \frac{\partial(\tilde{\psi} \circ f \circ \psi^{-1})^k}{\partial X^j}(\psi(x)) \\
&= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f^k}{\partial x^j}(x) \cdot \frac{\partial h}{\partial Y^k}(\tilde{\psi}(f(x))) \\
&= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f^k}{\partial x^j}(x) \cdot \tilde{e}_k(h).
\end{aligned}$$

Setzen wir nun $h = Y^i$ ein, so erhalten wir

$$a_{ij} = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x).$$

$\square$

Bemerkung 5.13. (i) Mit Erleichterung stellen wir fest, dass die Definition des Differentials auf Mannigfaltigkeiten für offene Mengen des $\mathbb{R}^n$ mit der früher gegebenen übereinstimmt.

(ii) Ist $f = \psi$ eine Karte von M, so wird $d\psi(x)$ in dieser Karte durch $A = \mathrm{id}$ dargestellt, insbesondere ist $d\psi(x) : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stets ein Isomorphismus (nämlich der, der $d\psi(x)(\frac{\partial}{\partial x^i}|_x) = e_i$ erfüllt).

(iii) Ist $f : M \longrightarrow N$ ein Diffeomorphismus, so gilt nach der Kettenregel

$$\mathrm{id} = d(\mathrm{id})(y) = d(f \circ f^{-1})(y) = df(f^{-1}(y)) \circ df^{-1}(y),$$

also ist $df^{-1}(y)$ ein Isomorphismus und es gilt

$$df^{-1}(y) = (df(f^{-1}(y)))^{-1}$$

für alle $y \in N$.

(iv) Sind $f, g \in C^\infty(M)$, so gilt eine Produktregel:

$$d(fg) = fdg + gdf.$$

Um dies zu sehen, betrachten wir für $D \in T_xM$

$$d(fg)(D) = D(fg) = fD(g) + gD(f) = fdg(D) + gdf(D).$$

Wir werden später eine allgemeinere Produktregel beweisen.

$\diamond$

Beispiel 5.14. Wir wollen das Differential der Abbildung

$$f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2, (z^1, z^2, z^3) \mapsto [z^1 : z^2 : z^3]$$

in den gegebenen Karten ausrechnen. Offenbar ist f surjektiv und jede "Faser" $f^{-1}([z^1 : z^2 : z^3])$ besteht aus genau einem Paar antipodischer Punkte. Das bedeutet auch, dass $f|_{S^2\setminus\{e_1\}}$ immer noch surjektiv ist. Um beispielsweise in die Karte $\tilde{U}_1 := \{z_2 \neq 0\} \subset \mathbb{R}P^2$ abzubilden, müssen wir f auf $U := S^2 \setminus \{z^2 = 0\} \subset U_1 = S^2 \setminus \{e_1\}$ betrachten. Beachte, dass U als Sphäre ohne einen Großkreis aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht. Wir berechnen für die Karten $\psi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \tilde{\psi}_1 : \tilde{U}_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\tilde{\psi}_1 \circ f|_U \circ \psi_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{X^1 = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

als

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_1 \circ f|_U \circ \psi_1^{-1}(X^1, X^2) &= \tilde{\psi}_2\left([\frac{(X^1)^2 + (X^2)^2 - 1}{(X^1)^2 + (X^2)^2 + 1} : \frac{2X^1}{(X^1)^2 + (X^2)^2 + 1} : \frac{2X^2}{(X^1)^2 + (X^2)^2 + 1}]\right) \\
&= \tilde{\psi}_2([(X^1)^2 + (X^2)^2 - 1 : 2X^1 : 2X^2]) \\
&= \left(\frac{(X^1)^2 + (X^2)^2 - 1}{2X^1}, \frac{X^2}{X^1}\right).
\end{aligned}$$

Damit entspricht $\varphi := d(\tilde{\psi}_1 \circ f|_U \circ \psi_1^{-1})(X^1, X^2)$ der Jacobimatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{(X^2)^2-1}{(X^1)^2} & \frac{X^2}{X^1} \\ -\frac{X^2}{(X^1)^2} & \frac{1}{X^1} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist

$$\det \varphi(X^1, X^2) = \frac{1}{2X^1} + \frac{1}{(X^1)^3} \neq 0$$

für alle $(X^1, X^2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{X^1 = 0\}$, also ist $\varphi(X^1, X^2)$ ein Isomorphismus. Da nach der Kettenregel

$$\varphi = d\tilde{\psi}_1(f(\psi_1^{-1}(X^1, X^2))) \circ df(\psi_1^{-1}(X^1, X^2)) \circ d\psi_1^{-1}(X^1, X^2)$$

und die Differentiale der Karten nach Bemerkung 5.13(ii) und (iii) Isomorpismen sind, ist auch $df(\psi_1^{-1}(X^1, X^2))$ ein Isomorphismus. Entsprechend laufen die Rechnungen in den anderen Karten und zeigen, dass $df(z)$ für alle $z \in S^2$ ein Isomorphismus ist. Offenbar ist dies möglich, auch wenn f selbst kein Diffeomorphismus ist. In gewissem Sinne können wir aber sagen, dass f ein *lokaler* Diffeomorphismus ist. Dies werden wir später genauer fassen und den Zusammenhang erklären. △

6. Untermannigfaltigkeiten

Eine Untermannigfaltigkeit N soll eine Teilmenge einer Manngfaltigkeit M modelliert auf dem Vektorraum V werden mit einer differenzierbaren Struktur, die mit der von M verträglich ist. Dies tut man am besten so: N soll lokal wie ein Untervektorraum von V aussehen.

DEFINITION 6.1. *Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit modelliert auf dem normierten Vektorraum V und $\tilde{V} \subset V$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Eine C^∞-Mannigfaltigkeit $N \subset M$ modelliert auf $\tilde{V}$ ist eine Untermannigfaltigkeit von M genau dann, wenn die Topologie von N die Relativtopologie bezüglich M ist und es einen Atlas $\mathcal{A}$ von M gibt, so dass für alle Karten $\psi : U \longrightarrow W \subset V$ von M des Atlasses $\mathcal{A}$ und $x \in U \cap N$ gilt, dass $\psi(x) \in W \cap \tilde{V}$ und die Einschränkung*

$$\psi|_N : U \cap N \longrightarrow W \cap \tilde{V} \subset \tilde{V}$$

dem maximalen Atlas von N angehört. (Damit ist die differenzierbare Struktur von N eindeutig durch die von M bestimmt.) Ist M endlich-dimensional, so heißt

$$\mathrm{codim} N := \dim M - \dim N$$

Kodimension von N in M.

BEMERKUNG 6.2. Eine Teilmenge $N \subset M$ einer C^∞-Mannigfaltigkeit M modelliert auf V, versehen mit der Relativtopologie und mit der Eigenschaft, dass es einen Atlas $\mathcal{A}$ von M gibt, so dass für alle Karten $\psi : U \longrightarrow W \subset V$ von M des Atlasses $\mathcal{A}$ und

$$\psi|_N : U \cap N \longrightarrow \psi(U \cap N)$$

ein Homöomorphismus ist für einen festen Untervektorraum $\tilde{V} \subset V$, wird durch die Karten $\psi|_N$ automatisch eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Dies meinen wir, wenn wir sagen, eine Teilmenge einer Mannigfaltigkeit sei eine Untermannigfaltigkeit. ◇

BEISPIEL 6.3.
(i) Sei M endlich-dimensional. $N \subset M$ ist eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0 genau dann, wenn $N \subset M$ offen ist.
(ii) S^2 ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$. Um dies zu sehen, nehmen wir als Untervektorraum $\tilde{V} := \{z^1 = 0\} \subset V := \mathbb{R}^3$ und als Karten von $\mathbb{R}^3$ die Abbildungen

$$\tilde{\psi}_{1/2} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\pm\mathbb{R}_0^+ e_1\} \longrightarrow \mathbb{R}^3, z \mapsto \left(\log|z|, \psi_{1/2}\left(\frac{z}{|z|}\right)\right)$$

sowie

$$\tilde{\psi}_3 : B_{\frac{1}{2}}(0) \longrightarrow B_{\frac{1}{2}}(0), z \mapsto z,$$

wobei $\psi_{1/2}$ die Karten von S^2 aus Beispiel 1.2 sind. Die Umkehrabbildungen von $\tilde{\psi}_{1/2}$ sind

$$\tilde{\psi}_{1/2}^{-1}(x) = e^{x^1}\psi_{1/2}^{-1}(x^2, x^3),$$

also sind sowohl $\tilde{\psi}_{1/2}$ als auch $\tilde{\psi}_{1/2}^{-1}$ unendlich oft differenzierbar, also liegen sie im maximalen Atlas, der von $\mathrm{id} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ erzeugt wird. Da auch

$$\tilde{\psi}_{12}(x^1, x^2, x^3) = (x^1, \psi_{12}(x_2, x_3))$$

unendlich oft differenzierbar ist, bilden $\tilde{\psi}_i, i = 1, 2, 3$ einen Atlas von $\mathbb{R}^3$. Darüberhinaus sind

$$\tilde{\psi}_{1/2}|_{S^2} : S^2 \setminus \{\pm e_1\} \longrightarrow \tilde{V}$$

der in 4.3(iv) gegebene Atlas von S^2; damit ist S^2 eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

(iii) Mit ganz ähnlicher Rechnung ist auch $S_p^n := \{z \in \mathbb{R}^{n+1} | \, \|z\|_p = 1\}$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$, falls $1 < p < \infty$ und eine C^∞-Untermannigfaltigkeit, wenn p zusätzlich eine gerade ganze Zahl ist. Die Grenzfälle $p = 1$ (Oktaeder) und $p = \infty$ (Würfel) sind keine differenzierbaren Untermannigfaltigkeiten. Dies werden wir später beweisen.

$\triangle$

Wir erwarten, dass Einschränkungen differenzierbarer Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten wieder differenzierbar sind. Kann man aber auch jede differenzierbare Funktion auf einer Untermannigfaltigkeit differenzierbar auf die umgebende Mannigfaltigkeit fortsetzen? Nein, denn $M := \mathbb{R}^2, N := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, f : N \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) := \frac{1}{|x|}$ liefert ein einfaches Gegenbeispiel. Auf Ebene von Keimen stimmt die Aussage aber:

Proposition 6.4. *Ist M eine C^∞-Mannigfaltigkeit, $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit und $U \subset M$ offen, so ist $f|_N \in C^\infty(U \cap N)$ für alle $f \in C^\infty(U)$ und die Einschränkeabbildung*

$$\rho : C^\infty_{M,x} \longrightarrow C^\infty_{N,x}$$

surjektiv für alle $x \in N$.

Beweis. Ist $f \in C^\infty(U)$ für eine offene Menge $U \subset M$ mit $x \in U$ und $\psi : U \longrightarrow W$ eine Karte von M wie in der Definition beschrieben, so heißt dies, dass

$$f \circ \psi^{-1} : W \longrightarrow \mathbb{R}$$

unendlich oft differenzierbar ist. Insbesondere ist auch

$$f|_N \circ (\psi|_N)^{-1} : W \cap \tilde{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

unendlich oft differenzierbar und daher $f|_N \in C^\infty(U \cap N)$.

Da $\tilde{V} \subset V$ abgeschlossen ist, existiert zu jedem $x \in V$ genau ein $\tilde{x} \in \tilde{V}$, das den Abstand zu x minimiert. Die Abbildung

$$\pi : V \longrightarrow \tilde{V}, x \mapsto \tilde{x}$$

ist linear und stetig. Dies nutzen wir, um Fortsetzungen zu konstruieren: Sei $\tilde{f} \in C^\infty(U \cap N)$ und $\psi : U \longrightarrow W$ eine Karte von M wie in der Definition. Die Funktion

$$f := \tilde{f} \circ (\psi|_N)^{-1} \circ \pi \circ \psi : U' \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist unendlich oft differenzierbar; hier ist U' eine offene Menge in M, die x enthält und so klein gewählt ist, dass die f definierende Komposition von Abbildungen definiert ist. Insbesondere ist $[f] \in C^\infty_{M,x}$ so, dass $\rho([f]) = [\tilde{f}] \in C^\infty_{N,x}$. $\square$

Dies verwenden wir, um zu sehen, dass die Tangetialräume von Untermannigfaltigkeiten Untervektorräume des Tangentialraums der umgebenden Mannigfaltigkeit sind:

Korollar 6.5. *Ist M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit, so ist $T_xN \subset T_xM$ für alle $x \in N$, indem man für alle $D \in T_xN$ und $f \in C^\infty_{M,x}$ setzt $D(f) := D(f|_N)$.*

Beweis. Nach Proposition 6.4 ist $f|_N \in C^\infty_{N,x}$ und daher die Anwendung von D wohldefiniert. Dass $D(f) = 0$ für alle $f \in C^\infty_{M,x}$ nur dann gelten kann, wenn $D = 0 \in T_xN$, folgt aus der Aussage von Proposition 6.4, dass die Einschränkeabbildung $\rho : C^\infty_{M,x} \longrightarrow C^\infty_{N,x}$ surjektiv ist. □

Dies erlaubt uns immer noch nicht, Untermannigfaltigkeiten zu konstruieren. Eine nützliche Obstruktion in Kodimension 1 ist aber die folgende:

Definition 6.6. *Sei M eine endlich-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine Teilmenge. Sei*

$$\mathrm{Sing}_0(N) := \{x \in N |\ df(x) = 0\ \forall\ f \in C^\infty_{M,x}\ \textit{mit}\ f|_N \equiv 0\}.$$

Dies sind die "schlimmsten" Singularitäten in dem Sinne, dass die Tangentialrichtungen in einem solchen Punkt den gesamten Tangentialraum erzeugen.

Proposition 6.7. *Ist M eine endlich-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit mit* $\mathrm{codim} N = 1$, *so gilt* $\mathrm{Sing}_0(N) = \emptyset$.

Beweis. Ohne Einschränkung ist $V' = \{X^1 = 0\}$ und damit erfüllt $z^1 := \psi^1 = X^1 \circ \psi \in C^\infty_{M,x}$ die Eigenschaft $z^1|_N \equiv 0$ in einer Umgebung von x. Da aber ψ eine Karte ist und damit $d\psi$ ein Isomorphismus, ist auch die erste Spalte der darstellenden Matrix nicht 0, das heißt $dz^1 \neq 0$ überall und damit $\mathrm{Sing}_0(N) = \emptyset$. □

Beispiel 6.8. Nun können wir beweisen, dass der Würfel und das Oktaeder keine Untermannigfaltigkeiten sind. Ist nämlich $N \subset \mathbb{R}^3 =: M$ beispielsweise der Würfel, so ist offenbar N ohne seine Kanten und Ecken eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1. Wir müssen also nur noch zeigen, das N keine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1 ist. Sei x dazu eine Ecke und $f \in C^\infty_{M,x}$ so, dass $f|_N \equiv 0$, so ist f auf allen drei Kanten der Ecke konstant 0, insbesondere ist

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = 0, i = 1, 2, 3,$$

das heißt

$$df(x) = 0.$$

Also ist $x \in \mathrm{Sing}_0(N)$ und damit N keine Untermannigfaltigkeit. Ähnlich geht der Beweis für das Oktaeder. △

Der folgende Satz dient dazu, endlich Untermannigfaltigkeiten einfacher konstruieren zu können.

Satz 6.9. *Sei $f : M \longrightarrow N$ eine stetig differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Ist $y \in N$ mit $\mathrm{rk} df(x) = \dim N$ für alle $x \in f^{-1}(y)$, so ist die Faser $f^{-1}(y)$ eine $(\dim M - k)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M.*

Beweis. (Skizze) Sei $m := \dim M, k := \dim N$. Ist (ψ, U) eine Karte von M um x und $(\tilde{\psi}, \tilde{U})$ eine Karte von N um $f(x)$, so können wir wegen $\mathrm{rk} df(x) = \dim N$ die $x^i := \psi^i$ so umsortieren, dass wir

$$\det \left(\frac{\partial(\tilde{\psi}^i \circ f)}{\partial x^j} \right)_{1 \leq i,j \leq k} \neq 0$$

erhalten. Die Idee ist nun, anstatt der Karte ψ die Abbildung

$$\xi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m, z \mapsto (\tilde{\psi}^1 \circ f(z) - \tilde{\psi}^1(y), \ldots, \tilde{\psi}^k \circ f(z) - \tilde{\psi}^k(y), \psi^{k+1}(z), \ldots, \psi^m(z))$$

zu betrachten. Offenbar gilt

$$f^{-1}(y) \cap U = \{z \in U |\ \xi^1(z) = \cdots = \xi^k(z) = 0\},$$

also wäre $f^{-1}(y)$ eine Untermannigfaltigkeit, wenn ξ eine zulässige Karte von M ist. Dazu muss man nachrechnen, dass $\xi \circ \psi^{-1}$ unendlich oft differenzierbar ist (leicht), dass ξ nach Verkleinerung von U ein Homöomorphismus auf sein Bild ist (schwerer) und, dass $\xi^{-1} \circ \psi$ unendlich oft differenzierbar ist (auch schwerer). Für die letzten beiden Eigenschaften nutzt man den sogenannten "Banachschen Fixpunktsatz"(, den wir beim Satz von Picard-Lindelöf implizit mitbewiesen haben).

Hier wollen wir nur noch beweisen, dass ξ nach Verkleinerung von U injektiv ist. Wir notieren $y := \psi(x)$. In den Koordinaten der Karte ψ ist

$$\xi \circ \psi^{-1}(z) = \xi(x) + d(\xi \circ \psi^{-1})(y)(z-y) + r(z)$$

mit $\lim_{z \longrightarrow y} \frac{|r(z)|}{|z-y|} = 0$. Das Differential $d(\xi \circ \psi^{-1})(y)$ entspricht der Matrix

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial(\tilde{\psi}^i \circ f)}{\partial x^j}\right)_{1 \leq i,j \leq k} & 0 \\ * & \mathrm{id} \end{pmatrix},$$

insbesondere ist

$$\det d(\xi \circ \psi^{-1})(y) = \det \left(\frac{\partial(\tilde{\psi}^i \circ f)}{\partial x^j} \right)_{1 \leq i,j \leq k} \neq 0,$$

also ist $d(\xi \circ \psi^{-1})(y)$ invertierbar. Daraus folgern wir, dass ein $c > 0$ existiert, so dass

$$|d(\xi \circ \psi^{-1})(y)(w)| \geq c|w|$$

für alle $0 \neq w \in \mathbb{R}^m$. Um dies zu sehen, bemerken wir, dass es reicht $|w| = 1$ zu betrachten. Die $m-1$-dimensionale Sphäre ist aber kompakt, also nimmt die stetige Funktion

$$|d(\xi \circ \psi^{-1})(y)(w)|$$

auf $S^{m-1} := \{|w| = 1\}$ ihr Minimum c an. Dies kann nicht 0 sein, da $d(\xi \circ \psi^{-1})(y)(w)$ sonst nicht invertierbar wäre.

Da $d(\xi \circ \psi^{-1})(y)$ stetig in y ist, können wir U konvex und so klein wählen, dass

$$|d(\xi \circ \psi^{-1})(y')(w)| \geq \frac{c}{2}|w|$$

für alle $y' \in \psi(U)$. Damit folgt für alle $z, z' \in \psi(U)$

$$\begin{aligned} |\xi \circ \psi^{-1}(z) - \xi \circ \psi^{-1}(z')| &= \left| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(\xi \circ \psi^{-1})(tz + (1-t)z')dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 d(\xi \circ \psi^{-1})(tz + (1-t)z')(z - z')dt \right| \\ &\overset{\text{Mittelwertsatz}}{=} |d(\xi \circ \psi^{-1})(\tau z + (1-\tau)z')(z - z')| \\ &\geq \frac{c}{2}|z - z'| \end{aligned}$$

für ein $\tau \in\in [0,1]$. Insbesondere folgt aus $\xi \circ \psi^{-1}(z) = \xi \circ \psi^{-1}(z')$ und $z, z' \in \psi(U)$ bereits $z = z'$, also ist $\xi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U)}$ injektiv und damit auch $\xi|_U$.

Dies soll hier genügen. □

Beispiel 6.10. (i) Die (verallgemeinerten) Sphären S^n_p für $1 < p < \infty$ erfüllen die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n+1} |x^i|^p = 1.$$

Anders ausgedrückt: $S^n_p := f_p^{-1}(1)$ für

$$f_p : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}, f_p(x) := \sum_{i=1}^{n+1} |x^i|^p.$$

Da $p > 1$ gewählt wurde, ist f_p mindestens einmal stetig differenzierbar. Allein die Betrachtung der Dimensionen zeigt

$$k := \max_{x \in \mathbb{R}^{n+1}} \mathrm{rk} df_p(x) \leq 1.$$

Das Differential df entspricht der Spalte

$$df(x) = p \cdot (\mathrm{sgn}(x^1)|x^1|^{p-1}, \ldots, \mathrm{sgn}(x^{n+1})|x^{n+1}|^{p-1})^t$$

und hat daher nur dann $\mathrm{rk} df(x) = 0$, wenn $x = 0$. Also ist $k = 1$ und

$$\mathrm{rk} df_p(x) = 1 = k \;\forall\; x \in S_p^n = f_p^{-1}(1).$$

Das zeigt erneut, dass S_p^n eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, wenn $1 < p < \infty$; ist $p \in 2\mathbb{N}$, so ist S_p^n eine C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$.

(ii) $M \in O(n, \mathbb{R})$ erfüllt

$$M^t M = \mathrm{id}.$$

Daher betrachten wir

$$f : Gl(n, \mathbb{R}) \longrightarrow Sym(n, \mathbb{R}), f(M) := M^t M - \mathrm{id}.$$

Wir erhalten $O(n, \mathbb{R}) = f^{-1}(0)$ und

$$df(M)(A) = M^t A + A^t M$$

für alle $A \in M(n, \mathbb{R})$. Natürlich ist auch $df(M)(A)$ stets symmetrisch und daher

$$k := \max_{M \in Gl(n\mathbb{R})} \mathrm{rk} df(M) \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

Der Kern von $df(M)$ berechnet sich als

$$\ker df(M) = (M^t)^{-1} \cdot \mathrm{Alt}(n, \mathbb{R}),$$

denn $A \in \mathrm{Alt}(n, \mathbb{R})$, d.h. $A^t = -A$, gilt genau dann, wenn

$$df(M)((M^t)^{-1}A) = M^t (M^t)^{-1} A + A^t M^{-1} M = A + A^t = 0.$$

Insbesondere ist $\dim \ker df(M) = \dim \mathrm{Alt}(n, \mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ und aus der Dimensionsformel folgt

$$\mathrm{rk} df(M) = k$$

für alle $M \in Gl(n, \mathbb{R})$. Insbesondere ist die Bedingung des Satzes erfüllt und $O(n, \mathbb{R})$ eine Untermannigfaltigkeit von $Gl(n, \mathbb{R})$. Da $O(n, \mathbb{R})$ zwei Zusammenhangskomponenten hat (die Elemente mit $\det M = 1$ und die mit $\det M = -1$), deren eine $SO(n, \mathbb{R})$, ist auch $SO(n, \mathbb{R})$ eine Untermannigfaltigkeit von $Gl(n, \mathbb{R})$. Ähnlich geht man vor, um zu zeigen, dass $SU(n, \mathbb{C})$ eine Untermannigfaltigkeit von $Gl(n, \mathbb{C})$ ist. $\triangle$

Der Satz 6.9 hat einige bemerkenswerte Konsequenzen.

DEFINITION 6.11. *Eine differenzierbare Abbildung $f : M \longrightarrow N$ zwischen C^∞-Mannigfaltigkeiten heißt lokaler Diffeomorphismus, wenn es zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung $U \ni x$ in M gibt, so dass $f|_U : U \longrightarrow f(U)$ ein Diffeomorphismus ist.*

KOROLLAR 6.12. *Ist $f : M \longrightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen C^∞-Mannigfaltigkeiten der gleichen endlichen Dimension $k := \dim M = \dim N$ und $\mathrm{rk} df(x) = k$ an einem Punkt $x \in M$, so existiert eine offene Umgebung $U \ni x$ in M, so dass $f|_U : U \longrightarrow f(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist f genau dann ein lokaler Diffeomorphismus, wenn $\mathrm{rk} df(x) = k$ für alle $x \in M$ gilt.*

Beweis. Zunächst wählen wir Karten $\psi : U \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^k$ von M mit $x \in U$ und $\tilde{\psi} : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{W} \subset \mathbb{R}^k$ von N mit $f(U) \subset \tilde{U}$. Die Eigenschaft $\mathrm{rk} df(x) = k$ ist (mit den üblichen Bezeichnungen) äquivalent zu

$$\det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) \right)_{i,j=1,\ldots,k} \neq 0.$$

Der linksseitige Ausdruck hängt aber stetig von x ab, also finden wir eine offene Menge U' mit $x \in U' \subset U$, so dass

$$\mathrm{rk} df(x') = k \ \forall \ x' \in U'.$$

Die Einschränkung $f' := f|_{U'} : U' \longrightarrow N$ erfüllt die Bedingungen des Satzes 6.9. Folglich ist $f'^{-1}(f(x'))$ eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M für alle $x' \in U'$. Nach weiterer Verkleinerung von U' dürfen wir also annehmen, dass $\{x'\} = f'^{-1}(f(x'))$, das heißt, $f|_{U'} : U' \longrightarrow f(U')$ ist bijektiv. Nach eventueller weiterer Verkleinerung dürfen wir annehmen, dass

$$\psi(U') \subset \overline{B_\varepsilon(\psi(x))} \subset W \subset \mathbb{R}^k.$$

Damit ist $f|_{U'}$ offen, insbesondere ist $f(U')$ offen und $f|_{U'}$ ein Homöomorphismus. Nun rechnet man nach, dass $df(f^{-1}(y))^{-1}$ in der Tat das Differential von $f^{-1}|_{f(U')}$ ist und daher $f|_{U'}$ ein Diffeomorphismus. □

In den Naturwissenschaften stellt sich oft das Problem, eine Funktion unter einer Nebenbedingung zu minimieren. Dafür bilden Untermannigfaltigkeiten den richtigen Rahmen.

Satz 6.13. *Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit, $\phi \in C^\infty(M)$, so dass $d\phi(x) \neq 0$ für alle $x \in N := \{z \in M |\ \phi(z) = 0\}$ und $f \in C^\infty(M)$. Wird in $x_0 \in N$ ein lokales Extremum von $f|_N$ angenommen, so existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, so dass für die Funktion*

$$F : M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, F(x, \lambda) := f(x) - \lambda\phi(x)$$

gilt:

$$dF(x_0, \lambda_0) = 0.$$

Beweis. Nach Satz 6.9 ist N eine Untermannigfaltigkeit von M. Sei $i : N \longrightarrow M$ die Inklusionsabbildung. Nach Satz 3.13 ist $0 = d(f \circ i)(x_0) = df(x_0)|_{T_{x_0}N}$. Zudem ist $\phi|_N = 0$, also gilt auch $0 = d\phi|_{T_{x_0}N}$. Zusammengenommen haben wir

$$dF(x_0, \lambda)|_{T_{x_0}N\times\mathbb{R}} = df(x_0)|_{T_{x_0}N} - \lambda d\phi(x_0)|_{T_{x_0}N} - \phi(x_0)d\lambda = 0 - 0 - 0 = 0.$$

Sei nun $D \in T_{x_0}M \setminus T_{x_0}N$, so muss $d\phi(x_0)(D) \neq 0$ und daher existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, so dass

$$df(x_0)(D) = \lambda_0 d\phi(x_0)(D).$$

Weil aber $T_{x_0}N \subset T_{x_0}M$ Kodimension 1 hat, folgt damit bereits

$$df(x_0) = \lambda_0 d\phi(x_0)$$

und daher

$$dF(x_0, \lambda_0) = 0.$$

□

Der Parameter λ heißt Lagrange-Multiplikator. Intepretiert man f als Lagrange-Funktion, so repräsentiert der Ausdruck $\lambda_0 d\phi(x_0)$ die Kraft, die im Punkt x_0 wirken muss, um ihn auf der Bahn N zu halten.

Beispiel 6.14. Wir wollen $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xyz$ auf der Sphäre S^2 maximieren. Dazu sehen wir, dass

$$S^2 = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$$

eine Darstellung wie in Satz 6.13 ist, wir also

$$\phi(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

wählen können. Damit ergibt sich

$$F(x, y, z, \lambda) := xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Wir suchen Nullstellen von dF. Also berechnen wir

$$dF(x, y, z, \lambda) = (yz - 2\lambda x)dx + (xz - 2\lambda y)dy + (xy - 2\lambda z)dz - (x^2 + y^2 + z^2 - 1)d\lambda = 0.$$

Da $dx, dy, dz, d\lambda$ in jedem Punkt linear unabhängig sind, müssen alle Koeffizienten verschwinden, also

$$0 = yz - 2\lambda x = xz - 2\lambda y = xy - 2\lambda z = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Multipliziert man die ersten drei Gleichungen mit der jeweils fehlenden Raumkoordinate des ersten Summanden und summiert auf, so erhält man

$$0 = 3xyz - 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 3xyz - 2\lambda,$$

nach Einsetzen der vierten Gleichung. Ist $\lambda = 0$, so sehen wir, dass $f(x, y, z) = 0$ und dies ist sicherlich nicht maximal. Wir dürfen also $\lambda \neq 0$ annehmen. Setzt man nun sukzessive die Gleichungen ineinander ein, so bekommen wir

$$x = \frac{yz}{2\lambda} \Rightarrow 0 = y(\frac{z^2}{2\lambda} - 2\lambda) \Rightarrow z^2 = 4\lambda^2.$$

Da das Problem invariant unter Vertauschung der Koordinaten ist (sowohl f als auch ϕ sind dies), folgt

$$x^2 = y^2 = z^2 = 4\lambda^2$$

und damit durch die vierte Gleichung

$$\lambda^2 = \frac{1}{12}.$$

Das Maximum wird also genau in allen Punkten $(x, y, z) = (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ mit 0 oder 2 negativen Vorzeichen angenommen und der Wert des Maximums ist $f(x, y, z) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. △

7. Das Tangentialbündel

Wir wollen die Tangentialräume für alle $x \in M$ in einer neuen Mannigfaltigkeit zusammenfassen, dem sogenannten Tangentialbündel:

$$TM := \bigcup_{x\in M} (\{x\} \times T_xM)$$

wird eine C^∞-Mannigfaltigkeit, indem man zu Karten $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ von M die Abbildungen

$$\tilde{\psi} : \tilde{U} := \bigcup_{x\in U} (\{x\} \times T_xM) \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}, (x, D) \mapsto (\psi(x), d\psi(x)(D))$$

als Karten nimmt. Das bedeutet, dass man eine Menge $\tilde{U} \subset TM$ offen nennt, wenn

$$\tilde{\psi}(\tilde{U} \cap \bigcup_{x\in U} (\{x\} \times T_xM)) \subset \mathbb{R}^{2n}$$

offen ist für alle Karten ψ von M. Diese Topologie von TM is automatisch hausdorffsch und zweitabzählbar. Die Übergangsabbildungen

$$\tilde{\psi}_{ij} = \tilde{\psi}_i \circ \tilde{\psi}_j^{-1} : \tilde{\psi}_j(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j) \longrightarrow \tilde{\psi}_i(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)$$

sind gegeben durch

$$\tilde{\psi}_{ij}(u,v) = (\psi_{ij}(u), d\psi_{ij}(u)(v)),$$

insbesondere ist $\tilde{\psi}_{ij}$ wieder unendlich oft differenzierbar und

$$\begin{aligned} \det d\tilde{\psi}_{ij}(u,v) &= \det \begin{pmatrix} (\frac{\partial(\psi_{ij})^k}{\partial u^l}(u))_{k,l=1,\dots,n} & 0_{n\times n} \\ *_{n\times n} & (\frac{\partial(\psi_{ij})^k}{\partial u^l}(u))_{k,l=1,\dots,n} \end{pmatrix} \\ &= |\det d\psi_{ij}(u)|^2 > 0, \end{aligned}$$

wobei $*_{n\times n}$ eine nicht näher bestimmte $n\times n$-Matrix bedeutet (in ihr kommen zweite Ableitungen von ψ_{ij} vor). Also ist TM eine orientierte C^∞-Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$, gegeben mit der Projektion $\pi : TM \longrightarrow M$.

Definition 7.1. *Ein Vektorfeld Y auf einer C^∞-Mannigfaltigkeit M ist eine differenzierbare Abbildung $Y : M \longrightarrow TM$, so dass $\pi\circ Y = \mathrm{id}_M$; das heißt $Y(x)\in T_xM$ für alle $x\in M$. Die Menge aller Vektorfelder auf M wird mit $\mathfrak{X}(M)$ bezeichnet.*

Beispiel 7.2. (i) TS^2 ist über S^2 diffeomorph zu

$$M := \{(u,v)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 |\ u\in S^2, v\perp u\},$$

jeweils mit den natürlichen Projektionen $\pi : TS^2 \longrightarrow S^2, \tilde{\pi} : M \longrightarrow S^2$, wobei $\perp$ bezüglich des Standardskalarproduktes in $\mathbb{R}^n$ gemeint ist. M ist die Gesamtheit der Tangentialflächen an der Sphäre, wie man sie sich anschaulich vorstellt.

Die differenzierbare Struktur von M soll die einer Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^6$ sein. Dazu rechnen wir nach, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (u,v)\mapsto (|u|^2, u\cdot v)$$

auf $M = f^{-1}(1,0)$ maximalen Rang hat. Wir berechnen

$$df(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ v & u \end{pmatrix} \in M(2\times 6;\mathbb{R}).$$

Offenbar hat $df(u,v)$ genau dann $\mathrm{rk} df(u,v) = 2$, wenn $u\neq 0\in\mathbb{R}^3$. Dies ist auf M der Fall, also ist M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^6$.

Andererseits wissen wir bereits, dass S^2 eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist und daher $T_uS^2\subset T_u\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ für alle $u\in S^2$. Ist $f(z) := |z|^2 \in C^\infty_{\mathbb{R}^3,u}$, so ist $f|_{S^2}\equiv 1$ und daher

$$D(f) = 0\ \forall\ D\in T_uS^2.$$

Ist $D = \sum_{i=1}^3 v^i \frac{\partial}{\partial z^i}|_u$, so bedeutet diese Gleichung

$$0 = D(f) = 2\sum_{i=1}^3 v^i u^i = 2v\cdot u,$$

also $v\perp u$. Dies gibt uns eine injektive Abbildung

$$\phi : TS^2 \longrightarrow M, (u,D)\mapsto (u,v).$$

Da für festes u die Abbildung

$$\phi(u,.) : T_uS^2 \longrightarrow \{v\in\mathbb{R}^3 |\ v\perp u\}$$

linear ist und

$$2 = \dim T_uS^2 = \dim\{v\in\mathbb{R}^3 |\ v\perp u\},$$

folgt, dass ϕ auch schon bijektiv ist. Nun ist es etwas technisch, aber letztenendes doch ein Leichtes zu zeigen, dass ϕ ein Diffeomorphismus ist.

TS^2 ist über S^2 *nicht* diffeomorph zu $S^2\times\mathbb{R}^2$. Dies folgt aus

SATZ 7.3. (IGELSATZ) *Jedes Vektorfeld auf S^2 besitzt eine Nullstelle.*

Beweisen werden wir ihn erst später.

(ii) TS^1 ist natürlich auch diffeomorph zur Gesamtheit der anschaulichen Tangenten wie im ersten Beispiel. Diesmal ist es aber auch über S^1 diffeomorph zu $S^1 \times \mathbb{R}$. Dazu rechnet man zunächst nach, dass

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1, \varphi \mapsto (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

ein lokaler Diffeomorphismus ist. Die lokalen Inversen

$$\psi_{(\varphi_0)} := (p|_{(\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi)})^{-1}$$

bilden einen Atlas von S^1. In der Tat bilden schon

$$\psi_1 := \psi_{(0)}, \psi_2 := \psi_{(\pi)}$$

einen Atlas und für die Übergangsabbildung gilt

$$\psi_{12} : (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi) \longrightarrow (-\pi, 0) \cup (0, \pi), \varphi \mapsto \begin{cases} \varphi & \text{, falls } \varphi \in (0,\pi) \\ \varphi - 2\pi & \text{, falls } \varphi \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Die Kettenregel besagt, dass

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} := \frac{\partial}{\partial\psi_1} = \frac{\partial}{\partial\psi_2}$$

ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf S^1 ist. Jedes $D \in T_xS^1$ ist also von der Form $a\frac{\partial}{\partial\varphi}$. Der angekündigte Diffeomorphismus ist gegeben durch

$$\phi : TS^1 \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}, (x, a\frac{\partial}{\partial\varphi}) \mapsto (x, a).$$

△

Die Vektorfelder besitzen die Struktur eine Lie-Algebra:

PROPOSITION 7.4. *Sind M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, so ist durch $X(f) \in C^\infty(U)$ für alle $f \in C^\infty(U)$ das Vektorfeld X als Abbildung $X : C^\infty_{M,x} \longrightarrow C^\infty_{M,x}$ für jedes $x \in M$ interpretierbar. Auf diese Weise wird durch*

$$[X,Y] : C^\infty_{M,x} \longrightarrow C^\infty_{M,x},\ [X,Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))$$

wieder ein Vektorfeld $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$ gegeben.

BEWEIS. Die $\mathbb{R}$-Linearität ist klar, bleibt also die Produktregel zu verifizieren. Dazu rechnen wir (und lassen der Übersicht halber den Punkt x weg)

$$\begin{aligned} [X,Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\ &= X(fY(g) + gY(f)) - Y(fX(g) + gX(f)) \\ &= fX(Y(g)) + X(f)Y(g) + gX(Y(f)) + X(g)Y(f) - fY(X(g)) - Y(f)X(g) \\ &\quad -gY(X(f)) - Y(g)X(f) \\ &= fX(Y(g)) - fY(X(g)) + gX(Y(f)) - gY(X(f)) \\ &= f[X,Y](g) + g[X,Y](f). \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 7.5. *Seien M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Ist $\psi : U \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte, $z^i := \psi^i$ und*

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial z^i},\ Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial z^i}$$

auf U, so gilt auf U

$$[X,Y] = \sum_{i,j=1}^{n} \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial z^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial z^j} \right) \frac{\partial}{\partial z^i}.$$

Beweis. Die i-te Komponente von $[X,Y]$ in den Koordinaten von ψ ist

$$[X,Y](z^i) = \sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial}{\partial z^j}(Y^i) - \sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial z^j}(X^i),$$

was genau die Behauptung war. □

Beispiel 7.6. Sei $M = \mathbb{R}^2$ und $X := x\frac{\partial}{\partial y}, Y := y\frac{\partial}{\partial x}$, so gilt $X^1 = 0, X^2 = x, Y^1 = y, Y^2 = 0$ und

$$\begin{aligned} [X,Y] &= \left(X^1 \frac{\partial Y^1}{\partial x} + X^2 \frac{\partial Y^1}{\partial y} - Y^1 \frac{\partial X^1}{\partial x} - Y^2 \frac{\partial X^1}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \\ &\quad + \left(X^1 \frac{\partial Y^2}{\partial x} + X^2 \frac{\partial Y^2}{\partial y} - Y^1 \frac{\partial X^2}{\partial x} - Y^2 \frac{\partial X^2}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \\ &= x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

△

Insbesondere zeigt Proposition 7.5, dass es, wie im $\mathbb{R}^n$, auch bei Mannigfaltigkeiten nicht auf die Reihenfolge partieller Ableitungen ankommt, die durch Karten gegeben sind:

Proposition 7.7. *Ist M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $\psi : U \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte, so gilt auf U*

$$[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$$

für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

Man kann sogar zeigen, dass es zu Vektorfeldern $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)} \in \mathfrak{X}(M)$, die $[X_{(i)}, X_{(j)}] = 0$ erfüllen und in jedem $x \in U$ linear unabhängig in T_xM sind, Koordinaten $\psi : U \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^i}$ gilt.

Einen großen Nachteil haben Vektorfelder allerdings: Eine differenzierbare Abbildung $f : M \longrightarrow N$ zwischen C^∞-Mannigfaltigkeiten induziert im Allgemeinen weder ein Vektorfeld auf N, wenn auf M eines gegeben ist noch umgekehrt. Ausnahmen sind freilich Diffeomorphismen. Unter anderem dieser Mangel wird durch "Differentialformen" behoben.

8. Differentialformen

Ist $f \in C^\infty(M)$, so ist das Differential

$$df(x) : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

(vgl. Bemerkung 5.7) eine lineare Abbildung, die differenzierbar von x abhängt, in dem Sinne, dass

$$df : TM \longrightarrow \mathbb{R}, (x, D) \mapsto df(x)(D)$$

eine differenzierbare Abbildung ist. Sie gibt an, wie schnell sich f in Richtung D von x aus ändert.

Die Konstruktion des Tangentialbündels kann verallgemeinert werden, um

$$\Lambda^r TM := \bigcup_{x \in M} \{x\} \times \Lambda^r(T_xM)$$

eine Struktur als C^∞-Mannigfaltigkeit über M zu geben: Zu Karten $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ von M nimmt man die Abbildungen

$$\tilde{\psi} : \tilde{U} := \bigcup_{x\in U}(\{x\} \times \Lambda^r T_x M) \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\binom{n}{r}}, (x, \Delta) \mapsto (\psi(x), \Lambda^r d\psi(x)(\Delta))$$

für $\Delta \in \Lambda^r T_x M$ als Karten. Die Dimension ist also $\dim \Lambda^r TM = n + \binom{n}{r}$.

Definition 8.1. *Eine Differentialform r-ter Stufe, oder kurz r-Form, auf einer C^∞-Mannigfaltigkeit M ist eine differenzierbare Abbildung*

$$\omega : \Lambda^r TM \longrightarrow \mathbb{R},$$

so dass $\omega|_{\Lambda^r T_x M} : \Lambda^r T_x M \longrightarrow \mathbb{R}$ linear ist. Der Vektorraum aller r-Formen wird mit $\mathcal{A}^r(M)$ bezeichnet.

r-Formen ordnen also r-dimensionalen infinitesimalen Quadern in M eine Zahl zu. Insbesondere ordnet eine $n = \dim M$-form einem infinitesimalen Volumenelement eine reelle Zahl zu, ein orientiertes Volumen sozusagen. Entsprechend kann eine nirgends verschwindende n-Form interpretiert werden als orientiertes Maß für infinitesimale Volumina. Dies wird sich für die Integrationstheorie als nützlich erweisen.

Die 0-Formen sind durch die Identifikation

$$(\omega : \Lambda^0 TM = M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}) \mapsto \omega(.,1) \in C^\infty(M)$$

die unendlich oft differenzierbaren Funktionen, $\mathcal{A}^0(M) = C^\infty(M)$. Wir haben also eine Differentialabbildung

$$d : \mathcal{A}^0(M) \longrightarrow \mathcal{A}^1(M), f \mapsto df.$$

Der wichtigste Punkt in diesem Abschnitt ist, dass wir in der Tat ein Differential

$$d : \mathcal{A}^r(M) \longrightarrow \mathcal{A}^{r+1}(M)$$

für alle $r \in \mathbb{N}_0$ mit sehr nützlichen Eigenschaften konstruieren können.

Zunächst müssen wir aber uns aber die Struktur der Differentialformen genauer ansehen.

Lemma 8.2. *Ist $\omega \in \mathcal{A}^r(M), \eta \in \mathcal{A}^s(M)$, so definiert*

$$\omega \wedge \eta(D_1 \wedge \cdots \wedge D_{r+s}) := \sum_{\sigma\in S_{r+s}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega(D_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge D_{\sigma(r)}) \cdot \eta(D_{\sigma(r+1)} \wedge \cdots \wedge D_{\sigma(r+s)})$$

ein Element $\omega \wedge \eta \in \mathcal{A}^{r+s}(M)$. Es gilt

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{rs}\eta \wedge \omega.$$

Beweis. Übung. □

Ist $\psi : U \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte von M, und bezeichnen wir wieder $x^i := \psi^i = X^i \circ \psi$, so erhalten wir Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial x^j}$ auf U und 1-Formen $dx^i \in \mathcal{A}^1(U)$. Diese erfüllen

$$dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta_{ij}$$

und sind durch diese Eigenschaft eindeutig gegeben.

Allgemeiner haben wir r-Formen

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \in \mathcal{A}^r(U)$$

für alle Tupel $i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, n$. Wie im zweiten Semester folgt, dass wir nur die aufsteigend angeordneten Tupel benötigen, also $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n$. Nehmen wir dies an und betrachten ein weiteres solches Tupel $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$, so wird die angegebene r-Form eindeutig charakterisiert durch

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \right) = \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_r j_r}.$$

Diese r-Formen genügen, um eine beliebige r-Form auf U darzustellen.

Proposition 8.3. *Sei M eine n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit und $\psi : U \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte. Bezeichnen wir wieder $x^i := \psi^i = X^i \circ \psi$ für $i = 1, \ldots n$, so hat jedes $\omega \in \mathcal{A}^r(U)$ eine eindeutige Darstellung*

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} f_{i_1 \ldots i_r}(x) dx^{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}(x)$$

mit $f_{i_1 \ldots i_r} \in C^\infty(U)$.

Beweis. Die durch die Funktionen

$$f_{i_1 \ldots i_r} := \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \right)$$

definierte r-Form

$$\tilde{\omega} := \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} f_{i_1 \ldots i_r}(x) dx^{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}(x)$$

erfüllt nach obigen Rechenregeln

$$\tilde{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \right) = f_{j_1 \ldots j_r} = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \right)$$

für alle $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$. Da nach den Sätzen des zweiten Semesters

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_x \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}|_x,\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n \right\}$$

eine Basis von $\Lambda^r T_x M$ bilden, folgt also

$$\tilde{\omega}(x) = \omega(x)$$

für alle $x \in U$ und damit die Behauptung. Dass die Funktionen $f_{i_1 \ldots i_r}$ unendlich oft differenzierbar sind, folgt unmittelbar aus der konstruierten differenzierbaren Struktur von $\Lambda^r TM$. □

Beispiel 8.4. Auf $M := \mathbb{R}^3$ wird durch

$$\omega(x, y, z) := x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$$

eine 2-Form $\omega \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^3)$ induziert. Eine 1-Form $\eta \in \mathcal{A}^1(\mathbb{R}^3)$ wird zum Beispiel gegeben durch

$$\eta := d(x^2 + y^2 + z^2).$$

Wir werden dieses Beispiel später fortzetzen. △

Das Verhalten bei Kartenwechsel beschreibt der folgende Satz.

Proposition 8.5. *Seien $\psi : U \longrightarrow W, \tilde{\psi} : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{W}$ zwei Karten von M und $x^i := \psi^i, y^i := \tilde{\psi}^i$ und $f \in C^\infty(U)$.*

(i) *Es gilt*

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i;$$

insbesondere

$$dx^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$$

auf $U \cap \tilde{U}$.

(ii) *Ist* $\omega \in \mathcal{A}^1(U \cap \tilde{U})$ *und* $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx^i = \sum_{i=1}^n g_i dy^i$, *so gilt*

$$g_i = \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i}.$$

(iii) *Ist* $\omega \in \mathcal{A}^n(U \cap \tilde{U})$ *und* $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = g dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$, *so gilt*

$$g = f \cdot \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)_{i,j}.$$

Beweis. (i) Nach Definition gilt

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

und daher die Behauptung. Die Aussage über die Kartenwechsel folgt auch noch einmal aus der Kettenregel:

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) \overset{5.8}{=} dx^i\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$$

und damit folgt die Behauptung.

(ii) folgt sofort aus (i).

(iii)

$$\begin{aligned} f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n &= \sum_{i_1,\ldots,i_n} f \frac{\partial x^1}{\partial y^{i_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^n}{\partial y^{i_n}} dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) f \frac{\partial x^1}{\partial y^{\sigma(1)}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^n}{\partial y^{\sigma(n)}} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n \\ &= f \cdot \det\left(\frac{dx^i}{dy^j}\right)_{i,j} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n. \end{aligned}$$

□

Beispiel 8.6. Wir setzen Beispiel 8.4 fort. Für η gilt nach Proposition 8.5

$$\eta = d(x^2 + y^2 + z^2) = 2(xdx + ydy + zdz).$$

Damit berechnen wir die 3-Form

$$\begin{aligned} \eta \wedge \omega &= 2(xdx + ydy + zdz) \wedge (xdy \wedge z + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy) \\ &= 2(x^2 dx \wedge dy \wedge dz + y^2 dy \wedge dz \wedge dx + z^2 dz \wedge dx \wedge dy) \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

△

Kommen wir zum Verhalten unter differenzierbaren Abbildungen.

Definition 8.7. *Sei* $f : M \longrightarrow N$ *eine differenzierbare Abbildung zwischen* C^∞*-Mannigfaltigkeiten und* $\omega \in \mathcal{A}^r(N)$. *Die Vorschrift*

$$f^*\omega(X_{(1)} \wedge \cdots \wedge X_{(r)}) := \omega(df(X_{(1)}) \wedge \cdots \wedge df(X_{(r)})) = \omega(\Lambda^r df(X_{(1)} \wedge \cdots \wedge X_{(r)}))$$

definiert eine Form $f^*\omega \in \mathcal{A}^r(M)$. *Sie heißt der Rückzug oder Pullback von* ω *unter* f. *Genauer ist*

$$f^* : \mathcal{A}^r(N) \longrightarrow \mathcal{A}^r(M)$$

eine lineare Abbildung.

Ist $\psi : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{W} \subset \mathbb{R}^k$ eine Karte von N, dort

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} f_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

und $U := f^{-1}(\tilde{U})$, so gilt auf U

$$f^*\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} (f_{i_1 \ldots i_r} \circ f) d(x^{i_1} \circ f) \wedge \cdots \wedge d(x^{i_r} \circ f).$$

Beim Beweis der lokalen Darstellung wird die Kettenregel in der Form $dx^i \circ df = d(x^i \circ f)$ verwendet.

Beispiel 8.8. Wir wollen die Formen ω und η aus Beispiel 8.4 auf die Sphäre zurückziehen, also betrachten wir die Inklusionsabbildung

$$i : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto x.$$

Wir rechnen für beliebiges $D = (X, Y, Z) \in T_uS^2 \subset \mathbb{R}^3$, also $D \perp u$, im Punkt $u = (x, y, z) \in S^2$

$$i^*\eta(D) = 2(xX + yY + zZ) = 2u \cdot D = 0,$$

also $i^*\eta = 0$.

Nun wollen wir zeigen, dass $i^*\omega$ eine nirgends verschwindende 2-Form auf S^2 ist. Im Punkt $u = (x, y, z) \in S^2$ sind die Vektoren

$$D_1 := (y, -x, 0) = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \in T_uS^2,\ D_2 := (0, z, -y) = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} \in T_uS^2.$$

Dementsprechend ist

$$D_1 \wedge D_2 = y\left(x\frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + y\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}\right) \in \Lambda^2 T_uS^2,$$

also ist zunächst für $y \neq 0$, dann aber aus Approximationsgründen auch für $y = 0$

$$\Delta := x\frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + y\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} \in \Lambda^2 T_uS^2.$$

Wir berechnen

$$i^*\omega(\Delta) = \omega(\Delta) = x^2 + y^2 + z^2 = 1 \neq 0,$$

also ist $i^*\omega \neq 0$ auf ganz S^2.

In der Karte $\psi_1 : S^2 \setminus \{e_1\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ aus Beispiel 4.3 hat $i^*\omega$ die Darstellung

$$\begin{aligned}
(\psi_1^{-1})^* i^*\omega &= \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} d\frac{2z^1}{|z|^2+1} \wedge d\frac{2z^2}{|z|^2+1} + \frac{2z^1}{|z|^2+1} d\frac{2z^2}{|z|^2+1} \wedge d\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} + \\
&\quad + \frac{2z^2}{|z|^2+1} d\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \wedge d\frac{2z^1}{|z|^2+1} \\
&= \left(\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \left(\left(\frac{2}{|z|^2+1} - \frac{4(z^1)^2}{(|z|^2+1)^2} \right) \left(\frac{2}{|z|^2+1} - \frac{4(z^2)^2}{(|z|^2+1)^2} \right) - \left(\frac{4z^1 z^2}{(|z|^2+1)^2} \right)^2 \right) + \right. \\
&\quad + \frac{2z^1}{|z|^2+1} \left(-\frac{4z^1 z^2}{(|z|^2+1)^2} \cdot \frac{4z^2}{(|z|^2+1)^2} - \left(\frac{2}{|z|^2+1} - \frac{4(z^2)^2}{(|z|^2+1)^2} \right) \cdot \frac{4z^1}{(|z|^2+1)^2} \right) + \\
&\quad \left. + \frac{2z^2}{|z|^2+1} \left(-\frac{4z^1 z^2}{(|z|^2+1)^2} \cdot \frac{4z^1}{(|z|^2+1)^2} - \left(\frac{2}{|z|^2+1} - \frac{4(z^1)^2}{(|z|^2+1)^2} \right) \cdot \frac{4z^2}{(|z|^2+1)^2} \right) \right) \\
&\quad dz^1 \wedge dz^2 \\
&= \left(\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \cdot \frac{4(1-|z|^4)}{(|z|^2+1)^4} - \frac{16}{(|z|^2+1)^5} |z|^2 (1+|z|^2) \right) dz^1 \wedge dz^2 \\
&= -\frac{4}{(1+|z|^2)^2} dz^1 \wedge dz^2 \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^2)
\end{aligned}$$

Aus der Vorschrift für ψ_2^{-1} sehen wir, dass sich beim Rückzug von ω unter ψ_2^{-1} nur das Vorzeichen ändert:

$$(\psi_2^{-1})^* i^*\omega = \frac{4}{(1+|z|^2)^2} dz^1 \wedge dz^2 \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^2).$$

Aus beiden Formeln ersehen wir erneut, dass $i^*\omega$ nirgends verschwindet. △

Konstruieren wir nun das sogenannte äußere Differential. Dazu nehmen wir Vektorfelder $X_{(1)}, \ldots, X_{(r+1)} \in \mathfrak{X}(U)$ auf einer Karte $\psi : U \longrightarrow W$ von M und eine r-Form $\omega \in \mathcal{A}^r(U)$. Zunächst bietet sich an

$$X_{(i)}(\omega(X_{(1)} \wedge \cdots \wedge \widehat{X_{(i)}} \wedge \cdots \wedge X_{(r+1)}))$$

zu betrachten. Damit gibt es zwei Probleme: Erstens, dieser Ausdruck hängt zwar von $X_{(1)}, \ldots, X_{(r+1)}$ ab, aber nicht nur von $X_{(1)} \wedge \cdots \wedge X_{(r+1)}$; dieses Manko kann behoben werden, indem man antisymmetrisiert: man betrachtet

$$\sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_{(i)}(\omega(X_{(1)} \wedge \cdots \wedge \widehat{X_{(i)}} \wedge \cdots \wedge X_{(r+1)})).$$

Gravierender ist das zweite Problem: Der Ausdruck, auch der antisymmetrisierte, hängt im Punkt $x \in U$ von $X_{(i)}$ in einer Umgebung von x ab, nicht nur von $X_{(i)}(x)$. Dies müsste aber für eine Differentialform nach Definition der Fall sein. Berechnen wir die störenden Ausdrücke in lokalen Koordinaten: Sei

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} f_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

und

$$X_{(i)} = \sum_{j=1}^{n} X^j_{(i)} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Wir bezeichnen

$$S^i_r := \{\sigma : \{1, \ldots, r\} \longrightarrow \{1, \ldots, \widehat{i}, \ldots, r+1\} \mid \sigma \text{ bijektiv}\}$$

und rechnen

$$
\begin{aligned}
X_{(i)}(\omega(X_{(1)} \quad \wedge \quad & \cdots \wedge \widehat{X_{(i)}} \wedge \cdots \wedge X_{(r+1)})) = \\
& \sum_{j=1}^{n} X_{(i)}^{j} \frac{\partial}{\partial x^{j}} \left(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \sum_{\sigma \in S_r^i} \operatorname{sgn}(\sigma) f_{i_1 \ldots i_r} X_{(\sigma(1))}^{i_1} \cdots X_{(\sigma(r))}^{i_r} \right) \\
= \quad & \sum_{j=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \sum_{\sigma \in S_r^i} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{\partial f_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x^j} X_{(i)}^{j} X_{(\sigma(1))}^{i_1} \cdots X_{(\sigma(r))}^{i_r} + \\
+ \quad & \sum_{j=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \sum_{\sigma \in S_r^i} \operatorname{sgn}(\sigma) f_{i_1 \ldots i_r} [(X_{(i)}^{j} \frac{\partial X_{(\sigma(1))}^{i_1}}{\partial x^j}) X_{(\sigma(2))}^{i_2} \cdots X_{(\sigma(r))}^{i_r} + \cdots + \\
+ \quad & X_{(\sigma(1))}^{i_1} \cdots X_{(\sigma(r-1))}^{i_{r-1}} (X_{(i)}^{j} \frac{\partial X_{(\sigma(r))}^{i_r}}{\partial x^j})].
\end{aligned}
$$

Es sind die letzten zwei Zeilen, in denen Ableitungen von den Komponenten $X_{(i)}$ vorkommen und die daher in festem x nicht nur von den Werten $X_{(i)}(x)$ abhängen.

Halten wir einen Augenblick lang das Tupel $(i_1, \ldots, i_r)$ fest und summieren noch alternierend über i, so interessieren uns die Terme

$$
\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{\sigma \in S_r^i} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{sgn}(\sigma) X_{(i)}^{j} \frac{\partial X_{(\sigma(1))}^{i_1}}{\partial x^j}.
$$

Zu jedem $\sigma \in S_r^i$ gibt es genau ein $\tau \in S_r^{\sigma(1)}$, so dass

$$
\tau(1) = i, \tau(k) = \sigma(k) \ \forall \ k \ge 2.
$$

Dies ist eine bijektive Anbildung zwischen S_r^i und $S_r^{\sigma(1)}$ und es gilt

$$
\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^{\sigma(1)-i+1} \operatorname{sgn}(\sigma).
$$

(Dies verbleibt als Übung.) Damit ist

$$
(-1)^{i+1} \operatorname{sgn}(\sigma) = -(-1)^{\sigma(1)+1} \operatorname{sgn}(\tau)
$$

und

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{\sigma \in S_r^i} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{sgn}(\sigma) \quad X_{(i)}^{j} \quad & \frac{\partial X_{(\sigma(1))}^{i_1}}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{\sigma \in S_r^i} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{sgn}(\sigma) X_{(i)}^{j} \frac{\partial X_{(\sigma(1))}^{i_1}}{\partial x^j} + \right. \\
+ \quad & \left. (-1)^{\sigma(1)+1} \operatorname{sgn}(\tau) X_{(\sigma(1))}^{j} \frac{\partial X_{(i)}^{i_1}}{\partial x^j} \right) \\
= \quad & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{\sigma \in S_r^i} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(X_{(i)}^{j} \frac{\partial X_{(\sigma(1))}^{i_1}}{\partial x^j} - X_{(\sigma(1))}^{j} \frac{\partial X_{(i)}^{i_1}}{\partial x^j} \right) \\
= \quad & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{\sigma \in S_r^i} (-1)^{i+1} \operatorname{sgn}(\sigma) [X_{(i)}, X_{(\sigma(1))}]^{i_1}
\end{aligned}
$$

Dies (und die analogen Ergebisse für $i_2, \ldots, i_r$ bzw. $\sigma(2), \ldots, \sigma(r)$) in die Rechnung eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r+1} \quad (-1)^{i+1} \quad & X_{(i)}(\omega(X_{(1)} \wedge \cdots \wedge \widehat{X_{(i)}} \wedge \cdots \wedge X_{(r+1)})) = \\
= \quad & \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \sum_{\sigma \in S_r^i} (-1)^{i+1} \mathrm{sgn}(\sigma) \frac{\partial f_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x^j} X_{(i)}^j X_{(\sigma(1))}^{i_1} \cdots X_{(\sigma(r))}^{i_r} + \\
+ \quad & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \sum_{\sigma \in S_r^i} (-1)^{i+1} \mathrm{sgn}(\sigma) \Big(f_{i_1 \ldots i_r} [X_{(i)}, X_{(\sigma(1))}]^{i_1} X_{(\sigma(2))}^{i_2} \cdots X_{(\sigma(r))}^{i_r} + \cdots + \\
+ \quad & X_{(\sigma(1))}^{i_1} \cdots X_{(\sigma(r-1))}^{i_{r-1}} [X_{(i)}, X_{(\sigma(r))}]^{i_r} \Big) .
\end{aligned}$$

Die letzten zwei Zeilen sehen schon so aus, als kämen sie von einem globalen Objekt. Wir rechnen dazu probeweise für das antisymmetrisierte (und daher nur von $X_{(1)} \wedge \cdots \wedge X_{(r+1)}$ abhängige) Objekt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} \quad \omega(\quad & [X_{(i)}, X_{(1)}] \wedge \cdots \wedge \widehat{X_{(i)}} \wedge \cdots \wedge X_{(r+1)} + \cdots + X_{(1)} \wedge \cdots \wedge \widehat{X_{(i)}} \wedge \cdots \wedge [X_{(i)}, X_{(r+1)}]) = \\
= \quad & \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \sum_{\tau \in S_r} (-1)^{i+1} \mathrm{sgn}(\tau) f_{i_1 \ldots i_r} \Big([X_{(i)}, X_{(1)}]^{i_{\tau(1)}} X_{(2)}^{i_{\tau(2)}} \cdots X_{(r+1)}^{i_{\tau(r)}} + \cdots + \\
+ \quad & X_{(1)}^{i_{\tau(1)}} \cdots X_{(r)}^{i_{\tau(r-1)}} [X_{(i)}, X_{(r+1)}]^{i_{\tau(r)}} \Big) ,
\end{aligned}$$

wobei hier in jedem Produkt kein Faktor $X_{(i)}^k$ vorkommt (daher die Indexverschiebung im letzten Faktor). Daher ist es besser, wir betrachten

$$T_r^i := \{\sigma : \{1, \ldots, \widehat{i}, r+1\} \longrightarrow \{1, \ldots, r\} | \ \sigma \text{ bijektiv}\}$$

und schreiben

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} \quad \omega(\quad & [X_{(i)}, X_{(1)}] \wedge \cdots \wedge \widehat{X_{(i)}} \wedge \cdots \wedge X_{(r+1)} + \cdots + X_{(1)} \wedge \cdots \wedge \widehat{X_{(i)}} \wedge \cdots \wedge [X_{(i)}, X_{(r+1)}]) = \\
= \quad & \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \sum_{\tau \in T_r^i} (-1)^{i+1} \mathrm{sgn}(\tau) f_{i_1 \ldots i_r} \Big([X_{(i)}, X_{(1)}]^{i_{\tau(1)}} X_{(2)}^{i_{\tau(2)}} \cdots X_{(r+1)}^{i_{\tau(r+1)}} + \cdots + \\
+ \quad & X_{(1)}^{i_{\tau(1)}} \cdots X_{(r)}^{i_{\tau(r)}} [X_{(i)}, X_{(r+1)}]^{i_{\tau(r+1)}} \Big) ,
\end{aligned}$$

Jeder Summand kann auch durch Umstellen der Faktoren anders geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
[X_{(i)}, X_{(1)}]^{i_{\tau(1)}} X_{(2)}^{i_{\tau(2)}} \cdots X_{(r+1)}^{i_{\tau(r+1)}} &= X_{(\tau^{-1}(1))}^{i_1} \cdots [X_{(i)}, X_{(\tau^{-1}(\tau(1)))}]^{i_{\tau(1)}} \cdots X_{(\tau^{-1}(r))}^{i_r} \\
&= X_{(\sigma(1))}^{i_1} \cdots [X_{(i)}, X_{(\sigma(\tau(1)))}]^{i_{\tau(1)}} \cdots X_{(\sigma(r))}^{i_r}
\end{aligned}$$

für $\sigma := \tau^{-1} \in S_r^i$. Also kommt jeder Summand von

$$\sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} \omega([X_{(i)}, X_{(1)}] \wedge \cdots \wedge \widehat{X_{(i)}} \wedge \cdots \wedge X_{(r+1)} + \cdots + X_{(1)} \wedge \cdots \wedge \widehat{X_{(i)}} \wedge \cdots \wedge [X_{(i)}, X_{(r+1)}])$$

in dem Ausdruck von

$$\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}X_{(i)}(\omega(X_{(1)}\wedge\cdots\wedge\widehat{X_{(i)}}\wedge\cdots\wedge X_{(r+1)}))$$

genau ein halbes Mal vor und es gilt:

Definition 8.9. *Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $\omega\in\mathcal{A}^r(M)$.*

$$\begin{aligned} d\omega(X_{(1)}\wedge\cdots\wedge X_{(r+1)}) \quad := \quad & \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}\Big(X_{(i)}(\omega(X_{(1)}\wedge\cdots\wedge\widehat{X_{(i)}}\wedge\cdots\wedge X_{(r+1)}))- \\ & -\frac{1}{2}\omega([X_{(i)},X_{(1)}]\wedge\cdots\wedge\widehat{X_{(i)}}\wedge\cdots\wedge X_{(r+1)}+\dots \\ & +X_{(1)}\wedge\cdots\wedge\widehat{X_{(i)}}\wedge\cdots\wedge[X_{(i)},X_{(r+1)}])\Big)\end{aligned}$$

hängt im Punkt x nur von $X_{(1)}(x)\wedge\cdots\wedge X_{(r+1)}(x)$ linear ab, definiert also ein Element in $\mathcal{A}^{r+1}(M)$. In lokalen Koordinaten $\psi:U\longrightarrow W\subset\mathbb{R}^n, x^i:=\psi^i$ gilt für

$$\omega|_U=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} f_{i_1\dots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$$

die Darstellung

$$\begin{aligned} d\omega|_U &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} df_{i_1\dots i_r}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n}\frac{\partial f_{i_1\dots i_r}}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}.\end{aligned}$$

Beweis. Aus unserer vorigen Rechnung folgt für die Vektorfelder $X_{(i)}:=\frac{\partial}{\partial x^i}$ die Darstellung

$$\begin{aligned} d\omega(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \quad \wedge & \quad \cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^{j_{r+1}}})= \\ &= \sum_{i=1}^{r+1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n}\sum_{\sigma\in S_r^i}(-1)^{i+1}\mathrm{sgn}(\sigma)\frac{\partial f_{i_1\dots i_r}}{\partial x^j}\delta_{jj_i}\delta_{i_1j_{\sigma(1)}}\cdots\delta_{i_rj_{\sigma(r)}} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n}\frac{\partial f_{i_1\dots i_r}}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^{j_{r+1}}}),\end{aligned}$$

wie man erneut nach eingängiger Prüfung der Vorzeichen der Permutationen sieht. □

Satz 8.10. *Die nach 8.9 zu jeder C^∞-Mannigfaltigkeit M und $r\in\mathbb{N}$ konstruierte Abbildung*

$$d:\mathcal{A}^r(M)\longrightarrow\mathcal{A}^{r+1}(M)$$

ist eindeutig charakterisiert durch folgende Eigenschaften:

(i) $dx(\frac{\partial}{\partial x})=1$ *auf* $\mathbb{R}$.
(ii) $d\circ f^*=f^*\circ d$ *für jede differenzierbare Abbildung* $f:N\longrightarrow M$,
(iii) $d\circ d=0$,
(iv) $d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^r\omega\wedge d\eta$ *für alle* $\omega\in\mathcal{A}^r(M),\eta\in\mathcal{A}^s(M)$.

Beweis. Zur Eindeutigkeit: Ist $f:M\longrightarrow\mathbb{R}$ differenzierbar, so folgt aus (ii) und (i), dass auf Ebene von 0-Formen d genau das Differential einer differenzierbaren Abbildung ist, wie oben definiert. Für 1-Formen benutzt man (ii), um sich auf eine Karte zu beschränken; dort ist

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx^i$$

und aus (iv) und (iii) folgt

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} df_i \wedge dx^i,$$

was allein durch d auf 0-Formen bestimmt ist. Also ist d auch auf 1-Formen eindeutig bestimmt. Mit Hilfe von (iv), (iii) und (ii) (wieder für die Einschränkeabbildung) hangelt man sich von r- zu $(r+1)$-Formen. Damit wäre dann die Eindeutigkeit gezeigt.

Nun müssen wir noch nachweisen, dass unser zuvor konstruiertes d genau diese Eigenschaften besitzt. (i) ist klar. Für (ii) und (iii) betrachten wir lokale Koordinaten $\psi : U \longrightarrow W$ und $\tilde{U} := f^{-1}(U)$. Ist

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} f_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r},$$

so folgt

$$\begin{aligned} dd\omega &= d\left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \frac{\partial f_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \frac{\partial^2 f_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x^k \partial x^j} dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $\frac{\partial^2 f_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x^k \partial x^j} dx^k \wedge dx^j = -\frac{\partial^2 f_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x^j \partial x^k} dx^j \wedge dx^k$ und sich daher die (j,k)-Terme mit den (k,j)-Termen aufheben.

Die Produktformel (iv) ergibt sich sogar aus der globalen Darstellung von $d\omega$ in Definition 8.9 durch scharfes Hinsehen. Ansonsten kann man sie natürlich auch durch eine Rechnung in lokalen Koordinaten verifizieren. Hier wählen wir eine elegantere dritte Möglichkeit: Für $r = 0$ folgt sie sofort aus der lokalen Darstellung der d-Operation und Bemerkung 5.13(iv). Dies werden wir wiederholt verwenden. Es bezeichne

$$\Phi : \mathcal{A}^r(M) \times \mathcal{A}^s(M) \longrightarrow \mathcal{A}^{r+s+1}, \phi(\alpha, \beta) = d(\alpha \wedge \beta)$$

und

$$\Psi : \mathcal{A}^r(M) \times \mathcal{A}^s(M) \longrightarrow \mathcal{A}^{r+s+1}, \phi(\alpha, \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta.$$

Beide Abbildungen sind $\mathbb{R}$-bilinear. Zudem gilt

$$\Phi(f\alpha, g\beta) = d(fg\alpha \wedge \beta) = fgd(\alpha \wedge \beta) + d(fg) \wedge \alpha \wedge \beta = fg\Phi(\alpha, \beta) + d(fg) \wedge \alpha \wedge \beta$$

und mit ähnlicher Rechnung

$$\Psi(f\alpha, g\beta) = fg\Psi(\alpha, \beta) + gdf \wedge \alpha \wedge \beta + fdg \wedge \alpha \wedge \beta = fg\Psi(\alpha, \beta) + d(fg) \wedge \alpha \wedge \beta$$

für alle $f, g \in C^\infty(M)$. Um $\Phi = \Psi$ zu zeigen, reicht es, α und β lokal zu betrachten und wegen der übereinstimmenden Rechenregeln und der lokalen Darstellung 8.3 müssen wir nur noch $\Phi(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}) = \Psi(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s})$ nachrechnen. Es gilt aber

$$\Phi(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}) = 0 = \Psi(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}).$$

Also ist die Produktregel bewiesen.

Schließlich rechnen wir nach

$$\begin{aligned} df^*\omega &= d\left(\sum_{1\leq i_1<\dots<i_r\leq n} (f_{i_1\dots i_r}\circ f)d(x^{i_1}\circ f)\wedge\dots\wedge d(x^{i_r}\circ f)\right) \\ &\overset{(iii),(iv)}{=} \sum_{1\leq i_1<\dots<i_r\leq n} d(f_{i_1\dots i_r}\circ f)\wedge d(x^{i_1}\circ f)\wedge\dots\wedge d(x^{i_r}\circ f) \\ &= f^*d\omega \end{aligned}$$

□

9. Teilung der Eins

Eine der grundlegendsten Eigenschaften reeller Mannigfaltigkeiten ist die Existenz einer Teilung der Eins. Das bedeutet, dass die 1-Funktion in eine Summe positiver C^∞-Funktionen zerlegt werden kann, die jeweils beliebig kleinen Träger haben. Im holomoprhen Kontext existiert dies nicht. Wir erinnern zunächst an die Definition des Trägers.

Definition 9.1. *Ist M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $f\in C^\infty(M)$, so heißt*

$$\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x\in M|\ f(x)\neq 0\}}$$

der Träger von f (für engl. 'support'). Ist der Träger voon f kompakt in M, so schreiben wir $f\in C_0^\infty(M)$.

Damit die Summe von Funktionen Sinn macht ohne einen Grenzwertbegriff bemühen zu müssen, sollten es in jedem Punkt nur endlich viele sein. Für beliebige Überdeckungen von M ist das aber nicht zwingend der Fall, daher definieren wir

Definition 9.2. (i) *Sei $\mathcal{U} := (U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung der C^∞-Mannigfaltigkeit M durch offene Mengen U_i, d.h. $M = \bigcup_{i\in I} U_i$. Eine weitere Überdeckung $\tilde{\mathcal{U}} := (\tilde{U}_j)_{j\in J}$ heißt Verfeinerung von $\mathcal{U}$, wenn zu jedem $j\in J$ ein $i\in I$ existiert, so dass $\tilde{U}_j\subset U_i$.*

(ii) *Eine Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ heißt lokal-endlich, wenn zu jede $x\in M$ eine offene Umgebung $U\ni x$ existiert, so dass die Menge*

$$\{i\in I|\ U\cap U_i\neq\emptyset\}$$

endlich ist.

Proposition 9.3. *Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Jede Überdeckung besitzt eine lokal-endliche Verfeinerung.*

Beweis. o. Bew. □

Kommen wir nun zur eigentlichen Aussage dieses Abschnitts.

Satz 9.4. *Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung. Es existiert eine lokal-endliche Verfeinerung $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{U}_j)_{j\in J}$ und Funktionen $\varphi_j\in C^\infty(M), j\in J$ mit*

(i) $\mathrm{supp}(\varphi_j)\subset\tilde{U}_j$ *ist kompakt,*
(ii) $\varphi\geq 0$ *und*
(iii) $\sum_{j\in J}\varphi_i(x) = 1$ *für alle $x\in M$.*

Beachte, dass die letzte Summe wegen der Lokal-Endlichkeit der Überdeckung für jedes $x\in M$ nur aus endlich vielen Summanden besteht. Eine solche Kollektion von Funktionen nennen wir eine Teilung der Eins bezüglich der Überdeckung $\mathcal{U}$. Ist M eine komplexe Kurve, so existiert keine holomorphe Teilung der Eins.

Beweis. Zum Beweis der Existenz für C^∞-Mannigfaltigkeiten sagen wir nur die Grundidee: Man reskaliert die $C^\infty(\mathbb{R})$-Funktion

$$\varphi(t) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-t^2}) & \text{, falls } |t| < 1 \\ 0 & \text{, falls } |t| \geq 1 \end{cases}$$

in Karten, die bezüglich der gegebenen Überdeckung klein genug gewählt werden, und wobei t der Abstand (in der Karte) zu einem fixen Punkt ist.

Ist M eine komplexe Kurve und φ_j holomoroph, so folgt, dass $\varphi_j = 0$ auf einer nicht-leeren offenen Menge und daher $\varphi_j = 0$ überall. Dies widerspricht der Annahme $\sum_{j\in J} \varphi_j(x) = 1$. □

Eine Teilung der Eins hätten wir schon benutzen können, um die Eindeutigkeit des Differentials d schon mit weniger Axiomen zeigen zu können. Dann wäre die Aussage aber im holomorphen Kontext falsch gewesen.

10. Orientierbarkeit

Nicht-Orientierbarkeit ist ein rein reelles Phänomen. Jede komplexe Kurve ist automatisch orientierbar. Auch dies werden wir in diesem diese Abschnitt sehen.

Definition 10.1. *Sei M eine n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit. Ein $\Omega \in \mathcal{A}^n(M)$, so dass*

$$\Omega(x) \neq 0 \ \forall \ x \in M$$

heißt Volumenform auf M.

Beispiel 10.2. (i) Die Standardvolumenform auf $\mathbb{R}^n$ ist $dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$.
(ii) Wir haben bereits gezeigt, dass für die Inklusionsabbildung $i : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Form

$$\Omega := i^*(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$$

eine Volumenform ist. Wir nennen sie die Standardvolumenform auf S^2.

△

Satz 10.3. *Eine C^∞-Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn es eine Volumenform auf M gibt.*

Beweis. Sei $\Omega \in \mathcal{A}^n(M)$ eine Volumenform und $\tilde{\psi}_i : U_i \longrightarrow \tilde{W}_i \subset \mathbb{R}^n$ ein Atlas. Nehmen wir $i \in I$ fest und notieren $x^j := \tilde{\psi}_i^j$. Dann ist auf U_i

$$\Omega = f_i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

mit $f_i \in C^\infty(U_i), f_i(x) \neq 0$ für alle $x \in U_i$. Also ist $f_i > 0$ oder $f_i < 0$ auf U_i. Im ersten Fall übernehmen wir $\psi_i := \tilde{\psi}_i$, im zweiten Fall ersetzen wir $\tilde{\psi}_i$ durch die Karte

$$\psi_i(x) := (-\tilde{\psi}_i^1(x), \tilde{\psi}_i^2(x), \ldots, \tilde{\psi}_i^n(x)).$$

Auf diese Weise erhalten wir einen Atlas $\psi_i : U_i \longrightarrow W_i$, für den $f_i > 0$ gilt. Seien nun $i, j \in I$ fest und $x^k := \psi_i^k, y^k := \psi_j^k$. Nach Proposition 8.5 gilt

$$f_j(x) = f_i(x) \cdot \det \left(\frac{\partial x^k}{\partial y^l}(x) \right)_{k,l} = f_i \cdot \det d\psi_{ij}(\psi_j(x))$$

auf $U_i \cap U_j$. Also ist

$$\det d\psi_{ij}(w) > 0$$

für alle $w \in \psi_j(U_i \cap U_j)$ und damit ist M orientierbar.

Sei nun M orientierbar und $\tilde{\psi} : \tilde{U}_i \longrightarrow \tilde{W}_i$ ein orientierter Atlas. Wir wählen eine lokalendliche Verfeinerung $\psi_j : U_j \longrightarrow W_j$ mit einer Teilung der Eins $\varphi_{(j)} \in C^\infty(M)$. Wir bezeichnen $x^k_{(j)} = \psi^k_j$. Es sind

$$\Omega_{(j)} := \varphi_{(j)} dx^1_{(j)} \wedge \cdots \wedge dx^n_{(j)} \in \mathcal{A}^n(M),$$

da $\operatorname{supp}(\varphi_{(j)}) \subset U_j$ kompakt sind und daher $\Omega_{(j)}$ außerhalb von U_j durch 0 unendlich oft differenzierbar fortgesetzt wird. Wir definieren

$$\Omega := \sum_{j \in J} \Omega_{(j)} \in \mathcal{A}^n(M).$$

Wir bemerken zunächst, dass die Summe in jedem Punkt wieder endlich ist; daher ist Ω wohldefiniert. Es bleibt zu zeigen, dass $\Omega \neq 0$ überall. Dazu sei $x \in M$ und

$$\{j \in J |\ x \in U_j\} = \{j_1, \ldots, j_k\};$$

diese Menge ist nach Konstruktion endlich. In x gilt dann

$$\Omega(x) = \sum_{m=1}^k \varphi_{(j_m)}(x) dx^1_{(j_m)} \wedge \cdots \wedge dx^n_{(j_m)} = \left(\sum_{m=1}^k \varphi_{(j_m)}(x) \det d\psi_{j_m j_1}(\psi_{j_1}(x)) \right) dx^1_{(j_1)} \wedge \cdots \wedge dx^n_{(j_1)}$$

Nach Voraussetzung ist $\det d\psi_{j_m j_1}(\psi_{j_1}(x)) > 0$ und daher besteht die letzte Summe nur aus nicht-negativen Summanden. Wegen $\sum_{m=1}^k \varphi_{(j_m)}(x) = 1$ existiert ein $p \in \{1, \ldots, k\}$, so dass $\varphi_{(j_p)}(x) \neq 0$. Daher ist

$$\sum_{m=1}^k \varphi_{(j_m)} \det d\psi_{j_m j_1}(\psi_{j_1}(x)) > 0$$

und damit $\Omega(x) \neq 0$. □

Lemma 10.4. *Ist $W \subset \mathbb{C}$ offen und $f : W \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so gilt*

$$\det df = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2.$$

Beweis. Übung; verwende Wirtingerkalkül aus der Funktionentheorie. □

Als Konsequenz dieses Lemmas erhalten wir sofort

Proposition 10.5. *Jede komplexe Kurve ist orientierbar.*

Beweis. Für einen holomorphen Atlas gilt

$$\det d\psi_{ij}(x) = \left| \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial z}(x) \right|^2 > 0,$$

also ist eine komplexe Kurve orientierbar. □

Dies gilt ebenso für höherdimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten, nur haben wir diese nicht ausreichend erkärt. Insbesondere gilt aber

Proposition 10.6. *Alle $\mathbb{C}P^n$ sind orientierbar.*

Bei den reell-projektiven Räumen ist die Situation differenzierter.

Satz 10.7. *Der reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ ist genau dann orientierbar, wenn n ungerade ist.*

Beweis. Sei $\omega \in \mathcal{A}^n(\mathbb{R}P^n)$. Wir bezeichnen mit $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ die Projektion. In den Karten $U_i := \pi(\{x_i \neq 0\}), \phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n, \pi(x) \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \dots, \frac{x_n}{x_i})$ können wir ω in lokalen Koordinaten darstellen. Fixieren wir zunächst Koordinaten $z_j := \frac{x_j}{x_0}, j \neq 0$ auf U_0 und $y_j := \frac{x_j}{x_1}, j \neq 1$ auf U_1. Wir finden $f_0, f_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\omega|U_0 = f_0 dz_1 \wedge dz_2 \wedge \cdots \wedge dz_n, \omega|U_1 = f_1 dy_0 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge \cdots \wedge dy_n.$$

Auf $U_0 \cap U_1$ gilt dann

$$\omega|U_0 \cap U_1 = f_0 dz_1 \wedge dz_2 \wedge \cdots \wedge dz_n = f_1 dy_0 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge \cdots \wedge dy_n.$$

Da $y = (\frac{1}{z}_1, \frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_n}{z_1})$ gilt

$$f_0(z) dz_1 \wedge dz_2 \wedge \cdots \wedge dz_n = f_1(y(z)) d\frac{1}{z}_1 \wedge d\frac{z_2}{z_1} \wedge \cdots \wedge d\frac{z_n}{z_1}.$$

Das führt auf

$$f_0(z) = -z_1^{-n-1} f_1(\frac{1}{z}_1, \frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_n}{z_1})$$

in $U_0 \cap U_1$. Indem man Koordinaten vertauscht, erhält man $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, die $\omega|U_i$ repräsentiert und

$$f_0(z) = (-1)^i z_i^{-n-1} f_i(\frac{1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i})$$

erfüllt. Nun definieren wir

$$F_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow \mathbb{R}, F_i(x) := (-1)^i x_i^{-n-1} f_i(\frac{1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i})$$

für $i > 0$ und $F_0(x) := x_0^{-n-1} f_0(z)$. Nun gilt nach der Gleichung für die f_i

$$F_i(x) = x_i^{-n-1} z_i^{n+1} f_0(z) = x_0^{-n-1} f_0(z) = F_0(x).$$

Also stimmen F_i und F_j auf $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ überein und definieren daher eine Funktion $F := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $x \mapsto F_i(x)$, falls $x \in \pi^{-1}(U_i)$. Diese Funktion erfüllt die Homogenität

$$F(\lambda x) = \lambda^{-n-1} F(x).$$

Ist nun n gerade, so gilt insbesondere

$$F(-x) = -F(x).$$

Nun fixieren wir ein $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Ist $F(\tilde{x}) \neq 0$, so sagt der Zwischenwertsatz aus, dass auf jedem Weg $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \gamma(0) = \tilde{x}, \gamma(1) = -\tilde{x}$ eine Nullstelle von F liegt. Also hat F eine Nullstelle x. Es existiert ein U_i, so dass $x \in \pi^{-1}(U_i)$. Ohne Einschränkung nehmen wir an $i = 0$. Nach Konstruktion ist

$$\omega(\pi(x)) = x_0^{n+1} F(x) dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n = 0.$$

Also hat jede Volumenform eine Nullstelle und daher ist $\mathbb{R}P^n$ nicht orientierbar, wenn n gerade ist.

Ist n ungerade, so definiert die Funktion $F : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (\sum_{i=0}^n x_i^{n+1})^{-1}$ eine nirgends verschwindende Volumenform auf $\mathbb{R}P^n$, indem wir die Konstruktion rückwärts rechnen. □

Eine orientierbare Mannigfaltigkeit hat genau zwei Orientierungen. Dies sieht man direkt an der Definition: Sei $\mathcal{C}$ der maximale Atlas von M. Ein orientierter Atlas $\mathcal{A}$ von M fixiert, gehört jede andere Karte entweder zum maximalen orientierten Atlas $\mathcal{B}$, der von $\mathcal{A}$ erzeugt oder zu $\mathcal{C} \setminus \mathcal{B}$. Man sieht, dass $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C} \setminus \mathcal{B}$ die einzigen maximalen orientierten Atlanten sind. Die zwei Orientierungen korrespondieren zu Volumenformen in folgender Weise: Zwei

Volumenformen $\Omega, \tilde{\Omega}$ repräsentieren diegleiche Orientierung (d.h. den gleichen maximalen orientierten Atlas), wenn es eine *positive* Funktion $f \in C^\infty(M)$ gibt, so dass

$$\Omega = f\tilde{\Omega}.$$

Da sich Volumenformen nur um positive oder negative Funktionen unterscheiden können, korrespondiert diese Äquivalenz von Volumenformen genau zu den beiden Orientierungen. Damit können wir orientierungserhaltende Abbildungen folgendermaßen definieren:

DEFINITION 10.8. *Seien M, N zwei orientierte C^∞-Mannigfaltigkeiten, deren Orientierungen durch die Volumenformen Ω, Ξ repräsentiert werden. Eine differenzierbare Abbildung*

$$f : M \longrightarrow N$$

heißt orientierungserhaltend, wenn es eine positive Funktion $h \in C^\infty(M)$ gibt, so dass

$$f^*\Xi = h\Omega$$

gilt.

BEMERKUNG 10.9. Nach dem Satz über die Inverse können nur lokale Diffeomorphismen orientierungserhaltend sein. $\diamond$

KAPITEL 2

Integration auf Mannigfaltigkeiten

1. Das Riemann-Integral von Differentialformen

Wie bereits erwähnt, wollen wir hier erklären, wie man n-Formen auf Mannigfaltigkeiten integriert. Ein wichtiger Punkt ist, dass eben nicht Funktionen, sondern n-Formen integriert werden!

Wir wollen dabei vorgehen wie beim eindimensionalen Riemann-Integral: Wir teilen die Mannigfaltigkeiten in kleine Teile und summieren die dortigen Maxima; dann lassen wir die Größe der Parzellen gegen 0 gehen. Zu klären sind die Bedeutungen von “kleine Teile”, “Maxima” und eben “Größe”. Entsprechend der eindimensionalen Theorie, wo wir Anfangs- und Endpunkt der Integration angeben mussten, also eine Orientierung des Integrationsbereichs, ist es auch hier notwendig, eine orientierte Mannigfaltigkeit zugrunde zu legen.

Sei also $(M, \mathcal{A})$ eine orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einem maximalen orientierten Atlas $\mathcal{A}$. Wir notieren

$$Q^n_\varepsilon(x) := \{z \in \mathbb{R}^n |\ |z^i - x^i| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall\ i = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^n;$$

wir lassen n weg, wenn die Dimension klar ist und x weg, wenn $x = 0$. Nun betrachten wir folgende Menge von Atlanten:

$$\mathfrak{A} := \{\mathcal{B} \text{ abzählbarer Atlas von } M |\ \mathcal{B} \subset \mathcal{A}, \psi : U \longrightarrow Q_1\ \forall\ \psi \in \mathcal{B}\}.$$

Aufgrund der Zweitabzählbarkeit einer Mannigfaltigkeit existieren stets abzählbare Atlanten. Durch Einschränkung und Reskalierung kann man aus jeder Karte um einen Punkt x eine andere Karte um x gewinnnen, so dass der Bildbereich Q_1 ist. Wir berechnen für eine Karte $\psi : U \longrightarrow Q_1$

$$I(\omega, \psi) := \sup_{z \in Q_1} (\psi^{-1})^* \omega \left(\frac{\partial}{\partial z^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial z^n}\right),$$

das heißt, in gewissem Sinne nehmen wir des Produkt des “Maximum von ω” mit der “Größe” der Karte, so weit dies eben definierbar ist. Dies müssen wir betragsweise aufsummieren, um testen zu können, wann die Karten klein genug sind:

$$\mu(\omega, \mathcal{B}) := \sum_{\psi \in \mathcal{B}} |I(\omega, \psi)|.$$

Definition 1.1. *Eine n-Form $\omega \in \mathcal{A}^n(M)$ heißt integrierbar, wenn*

$$\mu(\omega) := \inf_{\mathcal{B} \in \mathfrak{A}} \mu(\omega, \mathcal{B}) < \infty.$$

Ist dies erfüllt, so nehmen wir eine Folge von Atlanten $\mathcal{B}_n$, so dass

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(\omega, \mathcal{B}_n) = \mu(\omega)$$

und definieren das Integral von ω

$$\int_M \omega := \lim_{n \longrightarrow \infty} I(\omega, \mathcal{B}_n),$$

wobei

$$I(\omega,\mathcal{B}) := \sum_{\psi\in\mathcal{B}} I(\omega,\psi).$$

Dieses Integral ist unabhängig von der Wahl der Folge $\mathcal{B}_n$*.*

BEMERKUNG 1.2. (i) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\omega = f dz^1 \wedge \dots dz^n,$$

so lässt sich jeder Atlas $\mathcal{B} \in \mathfrak{A}$ verfeinern zu einem Atlas, der aus kleinen Quadern besteht:

$$\psi_{x,\varepsilon} : Q_\varepsilon(x) \longrightarrow Q_1, z \mapsto \frac{z-x}{\varepsilon}$$

für alle $x \in I_\varepsilon$ mit einer gewissen Punktmenge $I_\varepsilon \subset M$. Für einen solchen Atlas gilt

$$\begin{aligned}
\mu(\omega,\mathcal{B}) &= \sum_{\psi\in\mathcal{B}} \sup_{z\in Q_1} \left|(\psi^{-1})^*\omega\left(\frac{\partial}{\partial z^1}\wedge\dots\wedge\frac{\partial}{\partial z^n}\right)\right| \\
&= \sum_{x\in I_\varepsilon} \sup_{z\in Q_1} |f(\psi_{x,\varepsilon}^{-1}(z))| \det(d\psi_{x,\varepsilon}^{-1}) \\
&= \sum_{x\in I_\varepsilon} \sup_{z\in Q_1} |f(\varepsilon z + x)|\varepsilon^n.
\end{aligned}$$

Hieraus erkennen wir, dass eine möglichst überlappungsfreie Überdeckung durch $Q_\varepsilon(x)$ und $\varepsilon \longrightarrow 0$ das Infimum realisiert und daher insbesondere für $n = 1$ den bekannten Integralbegriff ergibt, wenn $|f|$ integrierbar ist.

(ii) Einen kleinen Unterschied zum eindimensionalen Riemann-Integral gibt es. Ist $M = \mathbb{R}$, so ist fdz genau dann integrierbar, wenn $|f|$ im Sinne des ersten Semesters uneigentlich integrierbar ist. So ist beispielsweise die Funktion

$$f(z) := \frac{\sin z}{z}$$

im Sinne des ersten Semesters uneigentlich Riemann-integrierbar, aber fdz nicht integrierbar, da $|f|$ nicht uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Für positive Funktionen besteht jedoch kein Unterschied.

Dieser scheinbare Nachteil der Integration von Differentialformen wird sich in Kürze als Vorteil erweisen, wenn wir mit dem Lebesgue-Integral eine bessere Integrationsmethode erhalten, die diese Eigenschaft teilt.

$\diamond$

Zunächst zeigen wir, dass das Integral funktoriell ist.

SATZ 1.3. *Sind M, N zwei orientierte C^∞-Mannigfaltigkeiten der Dimension n, $\omega \in \mathcal{A}^n(N)$ und $f : M \longrightarrow N$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus, so gilt*

$$\int_N \omega = \int_M f^*\omega.$$

BEWEIS. Ist $\psi : U \longrightarrow Q_1$ eine Karte von N, so ist $\tilde{\psi} := \psi \circ f : f^{-1}(U) \longrightarrow Q_1$ eine Karte von M und so induziert ein Atlas $\mathcal{B} \in \mathfrak{A}(N)$ einen Atlas $f^*\mathcal{B} \in \mathfrak{A}(M)$. Hier benutzen wir, dass f orientierungserhaltend ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
I(f^*\omega,\tilde{\psi}) &= \sup_{z\in Q_1} (\tilde{\psi}^{-1})^* f^*\omega\left(\frac{\partial}{\partial z^1}\wedge\dots\wedge\frac{\partial}{\partial z^n}\right) \\
&= \sup_{z\in Q_1} (\psi^{-1})^*\omega\left(\frac{\partial}{\partial z^1}\wedge\dots\wedge\frac{\partial}{\partial z^n}\right) \\
&= I(\omega,\psi).
\end{aligned}$$

Ist also $\mathcal{B}_n$ wieder eine Folge von Atlanten, die $\mu(\omega)$ approximiert, so folgt, dass $f^*\mathcal{B}_n$ eine Folge von Atlanten ist, die $\mu(f^*\omega)$ approximiert. Damit folgt ebenso

$$\int_N \omega = \lim_{n\longrightarrow\infty} I(\omega, \mathcal{B}_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} I(f^*\omega, f^*\mathcal{B}_n) = \int_M f^*\omega.$$

□

Korollar 1.4. (Transformationsformel) *Seien M, N zwei orientierte C^∞-Mannigfaltigkeiten, $f : M \longrightarrow N$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus und $\psi : U \longrightarrow W, \tilde{\psi} : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{W}$ Karten von M bzw. N, so dass $f(U) = \tilde{U}$. Bezeichnen wir wieder $x^i := \psi^i, y^i := \tilde{\psi}^i, f^i := y^i \circ f$, so gilt*

$$\int_{\tilde{U}} h dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = \int_U (h \circ f) \cdot \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_{i,j} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Beweis. Die rechte Seite der Gleichung ist $\int_U f^*(hdy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n)$. □

Um Integrale wirklich zu berechnen, ist es oftmals nützlich, die Dimension reduzieren zu können (in Dimension 1 wissen wir, wie man integriert). Dies ermöglicht der Satz von Fubini. Dazu benötigen wir aber etwas Vorbereitung.

Seien M, N zwei orientierte C^∞-Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m und n und

$$\omega : M \longrightarrow \mathcal{A}^n(N)$$

differenzierbar, $\eta \in \mathcal{A}^m(M)$ und sowohl η als auch $\omega(x)$ integrierbar für alle $x \in M$. Wir bezeichnen mit

$$\mathrm{pr}_1 : M \times N \longrightarrow M, \mathrm{pr}_2 : M \times N \longrightarrow N$$

die jeweiligen Projektionen. Die Abbildung

$$\gamma : M \longrightarrow \mathcal{A}^{m+n}(M \times N)$$

gegeben durch die Formen

$$\gamma(x) := \mathrm{pr}_1^*\eta \wedge \mathrm{pr}_2^*\omega(x) \in \mathcal{A}^{m+n}(M \times N)$$

induziert wiederum eine Form

$$\delta : \Lambda^{n+m}T(M \times N) \longrightarrow \mathbb{R}, \delta(x, y) := \gamma(x)(x, y) : \Lambda^{m+n}_{(x,y)}T(M \times N) \longrightarrow \mathbb{R},$$

die wir kurz benennen mit

$$\mathrm{pr}_1^*\eta \wedge \mathrm{pr}_2^*\omega := \delta.$$

Es gilt

Satz 1.5. (von Fubini) *Mit den obigen Bezeichnungen und Voraussetzungen ist*

$$\mathrm{pr}_1^*\eta \wedge \mathrm{pr}_2^*\omega$$

integrierbar und es gilt, dass

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_N \omega(x)$$

unendlich oft differenzierbar ist und

$$\int_{M\times N} \mathrm{pr}_1^*\eta \wedge \mathrm{pr}_2^*\omega = \int_M f\eta.$$

Insbesondere gilt: Ist $\omega \in \mathcal{A}^n(N)$ (also konstant), so gilt

$$\int_{M\times N} \mathrm{pr}_1^*\eta \wedge \mathrm{pr}_2^*\omega = \left(\int_M \eta\right) \cdot \left(\int_N \omega\right).$$

Beweis. Der Beweis ist recht technisch. Der entscheidende Punkt ist, dass man sich auf Produktkarten

$$\psi \times \phi : U \times V \longrightarrow Q_1^{m+n} = Q_1^m \times Q_1^n$$

zurückziehen darf und dort gilt

$$((\psi \times \phi)^{-1})^* \qquad (\mathrm{pr}_1^*\eta \wedge \mathrm{pr}_2^*\omega)\left(\frac{\partial}{\partial z^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{m+n}}\right)(u, v) =$$

$$(\psi^{-1})^*\eta\left(\frac{\partial}{\partial z^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial z^m}\right)(u) \cdot (\phi^{-1})^*\omega(\psi^{-1}(u))\left(\frac{\partial}{\partial z^{m+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{m+n}}\right)(v).$$

Der Rest des Beweises besteht aus Summation und Vergleichen von Atlanten. □

Beispiel 1.6. Die Anwendung mag viel einfacher erscheinen als die Formulierung des Satzes von Fubini.

(i) Sei $L := (0, 1)^2$ mit der Standardorientierung (durch die Karte id gegeben) und

$$\delta := (x^2 + y^2)dx \wedge dy.$$

Dann lässt sich $L = (0, 1) \times (0, 1) = M \times N$ schreiben und

$$\delta = dx \wedge ((x^2 + y^2)dy) = \mathrm{pr}_1^*\eta \wedge \mathrm{pr}_2^*\omega(x)$$

mit

$$\eta := dx, \omega(x) := (x^2 + y^2)dy.$$

Der Satz von Fubin sagt nun aus

$$\int_{(0,1)^2} (x^2 + y^2)dx \wedge dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2 + y^2)dy\right) dx = \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{3})dx = \frac{2}{3}.$$

△

Großen Nutzen hat es auch zu wissen, dass man "dünne Mengen" bei der Integration vernachlässigen darf.

Satz 1.7. *Ist M eine orientierte C^∞-Mannigfaltigkeit, $N \subset M$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit mit* $\mathrm{codim} N \geq 1$, *so ist für jedes integrierbare $\omega \in \mathcal{A}^n(M)$ auch $\omega|_{M\setminus N} \in \mathcal{A}^n(M \setminus N)$ integrierbar und es gilt*

$$\int_M \omega = \int_{M\setminus N} \omega|_{M\setminus N}.$$

Beweis. Dies sieht man, indem man das Integral von ω auf genügend kleinen Umgebungen von N berechnet und zeigt, dass es gegen 0 geht, wenn die Umgebung gegen N geht. □

Beispiel 1.8. (Volumen der Sphäre) Berechnen wir das Volumen der Sphäre, also das Integral der Standardvolumenform $\Omega \in \mathcal{A}^2(S^2)$ aus Beispiel 10.2(ii). Zunächst haben wir eine Orientierung zu wählen. Dies tun wir, indem wir die Standardvolumenform als Repräsentant der Orientierung bestimmen. Wir haben bereits errechnet, dass für

$$\tilde{\psi}_1 : S^2 \setminus \{e_1\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

aus Beispiel 4.3 gilt

$$(\tilde{\psi}_1^{-1})^*\Omega = \frac{4}{(1 + |z|^2)^2} dz^1 \wedge dz^2.$$

Da die Standardorientierung auf $\mathbb{R}^2$ durch $dz^1 \wedge dz^2$ gegeben wird, ist $\tilde{\psi}_1$ also orientierungserhaltend. Weiter ist $\{e_1\} \subset S^2$ eine 2-kodimensionale Untermannigfaltigkeit und $\{z^2 =$

0 und $z^1 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Vereinigung einer 1-kodimensionalen mit einer 2-kodimensionalen Untermannigfaltigkeit, also ergeben die Sätze dieses Abschnitts

$$\begin{aligned}
\int_{S^2} \Omega &= \int_{S^2 \setminus \{e_1\}} \Omega \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\tilde{\psi}_1^{-1})^* \Omega \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{4}{(1+|z|^2)^2} dz^1 \wedge dz^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{z^2=0 \text{ und } z^1 \geq 0\}} \frac{4}{(1+|z|^2)^2} dz^1 \wedge dz^2.
\end{aligned}$$

Bereits eine Zeile zuvor hätten wir den Satz von Fubini anwenden können, wir wollen hier aber lieber auf Polarkoordinaten wechseln. Das bedeutet, wir betrachten den Diffeomorphismus

$$\xi : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{z^2 = 0 \text{ und } z^1 \geq 0\}, (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\xi^*\Big(\frac{4}{(1+|z|^2)^2} dz^1 \wedge dz^2\Big) &= \frac{4}{(1+r^2)^2} d(r\cos\varphi) \wedge d(r\sin\varphi) \\
&= \frac{4}{(1+r^2)^2} (\cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi) \wedge (\sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi) \\
&= \frac{4}{(1+r^2)^2} r dr \wedge d\varphi
\end{aligned}$$

und damit rechnen wir mit Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{S^2} \Omega &= \int_{\mathbb{R}^+ \times (0,2\pi)} \frac{4r}{(1+r^2)^2} dr \wedge d\varphi \\
&= \left(\int_0^\infty \frac{4r}{(1+r^2)^2} dr\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \\
&= 2\pi \int_0^\infty \frac{4r}{(1+r^2)^2} dr \\
&= 2\pi \cdot \left(-\frac{2}{1+r^2}\right)\Big|_0^\infty \\
&= 4\pi,
\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit der Oberfläche der Einheitssphäre wie aus der Geometrie bekannt. △

2. Der Satz von Stokes

Wir können nun Differentialformen differenzieren und integrieren. In einer Dimension werden beide Operationen durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in Beziehung gesetzt. Dessen Verallgemeinerung auf Mannigfaltigkeiten wird als Satz von Stokes bezeichnet.

Dazu müssen wir den Begriff der Mannigfaltigkeit auf berandete Mannigfaltigkeiten erweitern.

Definition 2.1. (i) *Eine C^∞-Mannigfaltigkeit mit Rand modelliert auf V und $0 \neq \varphi \in L(V, \mathbb{R})$ ist ein zweit-abzählbarer hausdorffscher topologischer Raum M mit einer Überdeckung durch zusammenhängende offene Mengen $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Homöomorphismen*

$$\psi_i : U_i \longrightarrow W_i$$

auf offene Mengen $W_i \subset V \cap \{\varphi \geq 0\}$*, so dass*

$$\psi_{ij} := \psi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \psi_i(U_i \cap U_j)$$

unendlich oft differenzierbar sind. Alle Begriffe übertragen sich analog von Mannigfaltigkeiten auf Mannigfaltigkeiten mit Rand.

(ii) *Ist* M *eine* C^∞*-Mannigfaltigkeit mit Rand, so definiert man den Rand*

$$\partial M := \bigcup_{i \in I} \psi_i^{-1}(W_i \cap \ker \varphi).$$

Dieser ist offenbar eine Untermannigfaltigkeit von M *der Kodimension* 1 *und insbesondere eine* C^∞*-Mannigfaltigkeit (ohne Rand!). Daher gilt*

$$\partial\partial M = \emptyset.$$

(iii) *Ist* M *orientierbar und* $\mathcal{A} = \{(\psi_i, U_i)\}$ *ein orientierter Atlas von* M*, so bilden die Karten* $\psi_i|_{\psi_i^{-1}(W_i \cap \ker \phi)}$ *einen orientierten Atlas von* ∂M*. Wenn wir von einer orientierten Mannigfaltigkeit mit Rand reden, implizieren wir damit auch die induzierte Orientierung von* ∂M*.*

Beispiel 2.2. (i) Jede C^∞-Mannigfaltigkeit M ist eine C^∞-Mannigfaltigkeit mit Rand, wobei $\partial M = \emptyset$. Dies kann man realisieren, indem man $\varphi = z^1$ wählt und statt jeder Karte ψ die Karte $x \mapsto (e^{\psi^1(x)}, \psi^2(x), \ldots, \psi^n(x))$ betrachtet.

(ii) Zum Beispiel ist der abgeschlossene Ball

$$\overline{B_1} := \{x \in \mathbb{R}^n | \; |x| \leq 1\}$$

eine C^∞-Mannigfaltigkeit mit Rand. Der Rand ist S^2 mit seiner Standardorientierung. Als Karten nehmen wir *id* auf B_1 und für $x \in \partial B_1$ mit $x^1 \neq 0$ sei

$$\psi_x : \overline{B_1} \cap B_1(x) \longrightarrow W, z \mapsto (1 - |z|^2, z^2, z^3).$$

Man rechnet nach, dass es sich hierbei um Karten einer Mannigfaltigkeit mit Rand handelt.

$\triangle$

Wir erinnern an den Begriff des Trägers. Diesen können wir auch von Differentialformen definieren.

Definition 2.3. *Ist* M *eine* C^∞*-Mannigfaltigkeit mit Rand und* $\omega \in \mathcal{A}^r(M)$*, so heißt*

$$\operatorname{supp}(\omega) := \overline{\{x \in M | \; \omega(x) \neq 0\}}$$

der Träger von ω*. Ist der Träger von* ω *kompakt in* M*, so schreiben wir* $\omega \in \mathcal{A}_0^r(M)$*.*

Mit diesen Definitionen können wir nun eines der Hauptergebnisse der Integrationstheorie beweisen.

Satz 2.4. (von Stokes) *Sei* M *eine orientierte* n*-dimensionale* C^∞*-Mannigfaltigkeit mit Rand und* $\iota : \partial M \longrightarrow M$ *die Inklusionsabbildung. Für alle* $\omega \in \mathcal{A}_0^{n-1}(M)$ *gilt*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \iota^*\omega.$$

Beweis. Wir werden das in lokalen Koordinaten verifizieren. Dazu wählen wir eine Teilung der Eins $(\rho_i)_{i \in I}$ bezüglich eines lokal-endlichen Atlasses $\mathcal{A} = \{(\psi_i, U_i) | \; i \in I\}$ mit $W_i = Q_1(x_i)$ stets (was nach Drehung und Verkleinerung der Karten möglich wird) und notieren

$$\omega_{(i)} := \rho_i \omega.$$

Es gibt zwei Fälle: Entweder $Q_1(x_i) \cap \ker\varphi = \emptyset$ oder wir dürfen (nach Reskalierung) annehmen $x_i = 0$ und $\varphi = z^1$.

Im ersten Fall berechnen wir in der Karte ψ_i mit $x^j := \psi_i^j$ und

$$\omega_{(i)} = \sum_{k=1}^n f^k dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

mit Funktionen $f^k \in C_0^\infty(U_i)$ das Integral als

$$\begin{aligned}
\int_M d\omega_{(i)} &= \int_{U_i} d\left(\sum_{k=1}^n f^k dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^n\right) \\
&= \int_{Q_1(x_i)} d\left(\sum_{k=1}^n (f^k \circ \psi_i^{-1}) dz^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz^k} \wedge \cdots \wedge dz^n\right) \\
&= \int_{Q_1(x_i)} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{\partial(f^k \circ \psi_i^{-1})}{\partial z^k}\right) dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n.
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Fubini gilt weiter mit $Q_1^n(x_i) = Q_1^{n-1}(x_i^{(k)}) \times Q_1^1(x_i^k)$ und $x_i^{(k)} := (x_i^1, \ldots, \widehat{x_i^k}, \ldots, x_i^n) \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\begin{aligned}
\int_{Q_1^n(x_i)} \frac{\partial(f^k \circ \psi_i^{-1})}{\partial z^k} \quad & dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n = \\
&= (-1)^{n-k} \int_{Q_1^{n-1}(x_i^{(k)}) \times Q_1^1(x_i^k)} \frac{\partial(f^k \circ \psi_i^{-1})}{\partial z^k} dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \\
&= \int_{Q_1^{n-1}(x_i^{(k)})} \left(\int_{x_i^k - \frac{1}{2}}^{x_i^k + \frac{1}{2}} \frac{\partial(f^k \circ \psi_i^{-1})}{\partial z^k} dz^k\right) dz^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz^k} \wedge \cdots \wedge dz^n \\
&= \int_{Q_1^{n-1}(x_i^{(k)})} \left((f^k \circ \psi_i^{-1})(z^1, \ldots, x_i^k + \frac{1}{2}, \ldots z^n) - (f^k \circ \psi_i^{-1})(z^1, \ldots, x_i^k - \frac{1}{2}, \ldots z^n)\right) \\
&\quad \cdot dz^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz^k} \wedge \cdots \wedge dz^n \\
&= 0,
\end{aligned}$$

da $(f^k \circ \psi_i^{-1})$ kompakten Träger in $Q_1(x_i)$ hat. Also gilt

$$\int_M d\omega_{(i)} = 0 = \int_{\partial M} \iota^* \omega_{(i)}$$

im ersten Fall.

Im zweiten Fall, $\psi_i(U_i) = Q_1 \cap \{z^1 \geq 0\}$, bleibt bei derselben Rechnung nur der Term

$$\begin{aligned}
\int_{U_i} d\omega_{(i)} &= \int_{Q_1^n \cap \{z^1 \geq 0\}} \frac{\partial(f^1 \circ \psi_i^{-1})}{\partial z^1} dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \\
&= \int_{Q_1^{n-1}} (f^1 \circ \psi_i^{-1})(0, z^2, \ldots, z^n) dz^2 \wedge \cdots \wedge dz^n \\
&= \int_{Q_1^{n-1}} (\psi_i^{-1})^* \omega_{(i)}|_{\partial M} \\
&= \int_{\partial M} \iota^* \omega_{(i)}
\end{aligned}$$

übrig.

Die Bedingung, dass ω kompakten Träger hat manifestiert sich darin, dass nur endlich viele Indizes $i_1, \ldots, i_k$ ausreichen um

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} \omega_{(i_j)}$$

darzustellen.

Fassen wir alles zusammen, so sehen wir

$$\int_M d\omega = \sum_{j=1}^{k} \int_M d\omega_{(i_j)} = \sum_{j=1}^{k} \int_{\partial M} \iota^* \omega_{(i_j)} = \int_{\partial M} \iota^* \omega.$$

□

Bemerkung 2.5. Die Bedingung des kompakten Trägers ist essentiell. Mathematisch liegt das daran, dass eine punktweise konvergente Reihe von Funktionen noch lange nicht gleichmäßig konvergieren muss, eine Bedingung, die für die Vertauschung von Limites mit Integration notwendig ist. In der Rechnung führt das Vernachlässigen der Bedingung zu absurden Ergebnissen (so könnte man zum Beispiel die Randterme im HDI durch Betrachten des offenen Intervalls als Mannigfaltigkeit wegdiskutieren)! ⋄

Beispiel 2.6. Wir betrachten die Formen aus Beispiel 8.6 und wollen das Integral über den Einheitsball in $B_1 \subset \mathbb{R}^3$

$$\int_{B_1} \eta \wedge \omega$$

berechnen. Da bereits $\overline{B_1}$ kompakt ist, hat insbesondere $\eta \wedge \omega$ kompakten Träger auf $\overline{B_1}$. Wir wissen

$$\begin{aligned}
2(x^2+y^2+z^2)dx \wedge dy \wedge dz &= \eta \wedge \omega = d(x^2+y^2+z^2) \wedge (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy) \\
&= d\left((x^2+y^2+z^2)(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)\right) - \\
&\quad -(x^2+y^2+z^2)d(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy) \\
&= d\left((x^2+y^2+z^2)(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)\right) - \\
&\quad -3(x^2+y^2+z^2)dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

und damit

$$\eta \wedge \omega = \frac{2}{5} d\left((x^2+y^2+z^2)(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)\right).$$

Mit dem Satz von Stokes erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} \eta \wedge \omega &= \frac{2}{5} \int_{\overline{B_1}} d\left((x^2+y^2+z^2)(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)\right) \\
&= \frac{2}{5} \int_{S^2} \iota^* \left((x^2+y^2+z^2)(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)\right) \\
&= \frac{2}{5} \int_{S^2} \Omega \\
&= \frac{8}{5}\pi,
\end{aligned}$$

wobei Ω die Standardvolumenform auf S^2 ist und wir Beispiel 1.8 verwendet haben. Ebenso kann man dieses Resultat durch Übergang auf Polarkoordinaten durch direkte Integration erhalten. Vielfach spart der Satz von Stokes aber umständliche Rechnungen. △

Als direkte Anwendung des Satzes von Stokes erhalten wir eine verallgemeinerte partielle Integration, wie bereits im Beispiel angewandt.

KOROLLAR 2.7. *Sei M eine orientierte n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit mit Rand und $\alpha \in \mathcal{A}_0^r(M), \beta \in \mathcal{A}^s(M)$, so dass $r+s+1=n$. Es gilt*

$$\int_M d\alpha \wedge \beta = \int_{\partial M} \alpha \wedge \beta + (-1)^{r+1} \int_M \alpha \wedge d\beta.$$

BEWEIS. Bemerke, dass alle vorkommenden Formen kompakten Träger haben und setze die Rechenregel

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta$$

in den Satz von Stokes ein. □

Auch der Igelsatz ist nun endlich beweisbar.

SATZ 2.8. (IGELSATZ) *Jedes Vektorfeld auf S^2 besitzt eine Nullstelle.*

BEWEIS. Ist $\tilde{Y}$ ein Vektorfeld auf S^2 ohne Nullstelle, so fassen wir zunächst $\tilde{Y}$ als Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$ auf, also als vektorwertige Funktion

$$\tilde{Y} : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

auf, die überall $\tilde{Y}(u) \perp u$ erfüllt. Da $\tilde{Y}(u) \neq 0$ stets, können wir übergehen auf das normierte Vektorfeld

$$Y(u) := \frac{\tilde{Y}(u)}{|Y(u)|}.$$

Die Abbildung

$$H : S^2 \times [0,1] \longrightarrow S^2, H(u,t) := \cos(\pi t) \cdot u + \sin(\pi t) \cdot Y(u)$$

ist wohldefiniert und es gilt

$$H(.,0) = \mathrm{id},\ H(.,1) = -\mathrm{id}.$$

Nun kann man aber nachrechnen, dass

$$\frac{d}{dt} H(.,t)^* \Omega = d\eta_t$$

für die Standardvolumenform Ω auf S^2 und

$$\eta_t = i^*((H_1 G_2 - H_2 G_1) dH_3 + (H_2 G_3 - H_3 G_2) dH_1 + (H_3 G_1 - H_1 G_3) dH_2),$$

wobei $H(u,t) = (H_1, H_2, H_3)$, $G(u,t) = (G_1, G_2, G_3) := -\pi \sin(\pi t) \cdot u + \pi \cos(\pi t) \cdot Y(u) = \frac{\partial H}{\partial t}$ und $i : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Inklusion ist. Damit ist nach dem Satz von Stokes

$$\frac{d}{dt} \int_{S^2} H(.,t)^* \Omega = \int_{S^2} d\eta_t = 0,$$

also $\int_{S^2} H(.,t)^* \Omega$ konstant. Dies führt aber zum Widerspruch

$$4\pi = \int_{S^2} \Omega = \int_{S^2} H(.,0)^* \Omega = \int_{S^2} H(.,1)^* \Omega = \int_{S^2} (-\mathrm{id})^* \Omega = -\int_{S^2} \Omega = -4\pi.$$

Hier haben wir benutzt, dass $(-\mathrm{id})^* \Omega = (-1)^3 \Omega$ nach Konstruktion von Ω gilt. □

KAPITEL 3

Riemannsche Mannigfaltigkeiten

1. Riemannsche Metriken

DEFINITION 1.1. *Seien V, W reelle Vektorräume. Wir definieren*

$$V \otimes W := \{\sum_{i=1}^{k} v_i \otimes w_i | v_i \in V, w_i \in W, k \in \mathbb{N}\}$$

mit folgenden Identifikationen:

(i) $(v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w$,
(ii) $(\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w) = \lambda \cdot v \otimes w$,
(iii) $v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w'$

für alle $v, v' \in V, w, w' \in W, \lambda \in \mathbb{R}$. Der Vektorraum $V \otimes W$ heißt Tensorprodukt von V mit W, seine Elemente Tensoren. Ist $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ eine Basis von V und $\{f_i\}_{i=1,\ldots,m}$ eine Basis von W, so ist $\{e_i \otimes f_j\}_{i=1,\ldots,n,j=1,\ldots,m}$ eine Basis von $V \otimes W$. Insbesondere ist $\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$.

Wir erinnern an die Notation $V^* := L(V, \mathbb{R})$ für den Dualraum eines reellen Vektorraums.

PROPOSITION 1.2. *Seien V, W reelle Vektorräume. Die Abbildung*

$$\iota : V^* \otimes W^* \longrightarrow (V \otimes W)^*$$

induziert durch

$$\iota(\eta \otimes \zeta)(v \otimes w) := \eta(v) \cdot \zeta(w)$$

für alle $\eta \in V^*, \zeta \in W^*, v \in V, w \in W$ ist ein Isomorphismus.

BEMERKUNG 1.3. (i) Ein Skalarprodukt auf dem reellen Vektorraum V ist ein Tensor $\tau \in V^* \otimes V^* = (V \otimes V)^*$, so dass $\tau(v \otimes w) = \tau(w \otimes v)$ für alle $v, w \in V$ gilt und $\tau(v \otimes v) > 0$, falls $v \neq 0$.
(ii) Die Menge $TM^* \otimes TM^* := \bigcup_{x \in M} T_xM^* \otimes T_xM^*$ wird auf natürliche Art zu einer C^∞-Mannigfaltigkeit.

$\diamond$

DEFINITION 1.4. *Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Eine Riemannsche Metrik auf M ist eine differenzierbare Abbildung*

$$g : M \longrightarrow TM^* \otimes TM^*,$$

so dass

(i) $g(x) \in T_xM^* \otimes T_xM^*$ *für alle* $x \in M$,
(ii) $g(x)(X \otimes Y) = g(x)(Y \otimes X)$ *für alle* $X, Y \in T_xM$,
(iii) $g(x)(X \otimes X) > 0$ *für alle* $X \in T_xM \setminus \{0\}$.

In anderen Worten: $g(x)$ ist ein Skalarprodukt auf T_xM für alle $x \in M$, das differenzierbar von x abhängt. In jedem Punkt ist g also eine Art, infinitesimale Längen und Winkel zu messen. (M, g) heißt eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Betrachten wir eine Riemannsche Metrik in lokalen Koordinaten. Sei $\psi : U \longrightarrow W$ eine Karte und $z^i := \psi^i$. Die Differentiale $dz^i(x)$ bilden eine Basis von T_xM^* für alle $x \in U$. Daher kann man jede Riemannsche Metrik lokal schreiben als

$$g|_U = \sum_{i,j=1}^{n} g_i j dz^i \otimes dz^j,$$

wobei die Koeffizienten $g_{ij} \in C^\infty(U)$ eine symmetrische, positiv definite Matrix bilden, d.h. die Bedingungen

$$g_{ij} = g_{ji} \text{ und } \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} X^i X^j > 0$$

erfüllen für alle $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial z^i} \neq 0$.

Beispiel 1.5. Auf $M = \mathbb{R}^n$ ist die euklidische Metrik durch $g = \sum_{i=1}^n dz^i \otimes dz^i$ gegeben. $\triangle$

Wir wollen zunächst sehen, dass Untermannigfaltigkeiten Riemannscher Mannigfaltigkeiten eine natürliche Riemannsche Metrik tragen.

Proposition 1.6. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $N \overset{\iota}{\subset} M$ eine Untermannigfaltigkeit. Dann ist $(N, \iota^* g)$ eine Riemmannsche Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Da $T_xN \subset T_xM$ aufgefasst werden kann und dann $\iota^* g(X, Y) = g(X, Y)$ für alle $X, Y \in T_xN$ gilt, übertragen sich die Eigenschaften von g unmittelbar auf $\iota^* g$.

Man kann dies auch in lokalen Koordinaten sehen. Ist $N \cap U = \{z^{k+1} = \cdots = z^n = 0\}$, so gilt $\iota^* dz^j = 0$ für alle $j \geq k+1$ und daher

$$\iota^* g = \sum_{i=1}^{k} g_{ij} dz^i \otimes dz^j.$$

Die Matrix $(g_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}$ ist wieder symmetrisch; und positiv definit, wie man durch Betrachten der Hauptminoren sieht. $\square$

Beispiel 1.7. Insbesondere induziert die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^3$ eine Riemmansche Metrik g auf S^2. Drücken wir sie in Kugelkoordinaten $(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aus. Zunächst zur euklidischen Metrik g_0 auf $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} g_0 &= dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz \\ &= d(r\cos\varphi\cos\theta) \otimes d(r\cos\varphi\cos\theta) + d(r\sin\varphi\cos\theta) \otimes d(r\sin\varphi\cos\theta) + d(r\sin\theta) \otimes d(r\sin\theta) \\ &= dr \otimes dr + r^2(\cos^2\theta d\varphi \otimes d\varphi + d\theta \otimes d\theta). \end{aligned}$$

Die induzierte Metrik $g := i^* g_0$ auf S^2 erhalten wir, indem wir $r = 1$ setzen. Insbesondere ist $dr = 0$ damit und

$$g = \cos^2\theta d\varphi \otimes d\varphi + d\theta \otimes d\theta.$$

$\triangle$

Wie hängen nun Riemannsche Metriken mit Volumenformen zusammen, d.h. wie komme ich von der Längen- und Winkelmessung zur Messung von Volumina?

Definition 1.8. *Sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. $g(x)$ lässt sich auch als lineare Abbildung*

$$\tilde{g}(x) : T_xM \longrightarrow T_xM^*$$

auffassen indem man

$$\tilde{g}(x)(X)(Y) := g(x)(X \otimes Y)$$

setzt. Dann ist

$$\det \tilde{g} : \Lambda^n T_x M \longrightarrow \Lambda^n T_x M^*$$

eine lineare Abbildung. Diese induziert umgekehrt ein Element

$$\det g \in \Lambda^n T_x M^* \otimes \Lambda^n T_x M^*$$

durch

$$\det g(\omega \otimes \eta) := \det \tilde{g}(\omega)(\eta)$$

für alle $\omega, \eta \in \Lambda^n T_x M$*. Es ist* $\dim \Lambda^n T_x M = 1$*. Da* g *positiv definit ist, ist auch* $\det g > 0$ *in dem Sinne, dass* $\det g(\Xi \otimes \Xi) > 0$ *für alle* $\Xi \in \Lambda^n T_x M \setminus \{0\}$*. Damit existiert in jedem* $x \in X$ *ein eindeutiges* $\Omega_g(x) \in \Lambda^n T_x M^*$ *so, dass* $[\Omega_g]$ *die Orientierung von* M *repräsentiert und*

$$\det g(x)(\Xi \otimes \Xi) = \Omega_g(x)(\Xi)^2.$$

Dies bedeutet aber

$$\det g(x) = \Omega_g(x) \otimes \Omega_g(x).$$

Wegen der Eindeutigkeit hängt Ω_g *von* x *differenzierbar ab. Also ist* $\Omega_g \in \mathcal{A}^n(M)$ *eine Volumenform und es gilt*

$$\det g = \Omega_g \otimes \Omega_g.$$

Die Volumenform Ω_g *heisst die von* g *induzierte. In lokalen Koordinaten wie oben gilt*

$$\Omega_g = \sqrt{\det(g_{ij})_{i,j}} dz^1 \wedge \ldots dz^n.$$

Hierbei sind die lokalen Koordinaten aus dem orientierten Atlas, d.h. $dz^1 \wedge \ldots dz^n$ *repräsentiert die Orientierung von* U*.*

Beispiel 1.9. Die von g auf S^2 induzierte Volumenform ist

$$\Omega_g = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} d\varphi \wedge d\theta = \cos\theta d\varphi \wedge d\theta.$$

Nach den Rechnungen in den Präsenzübungen stimmt also Ω_g mit der Standardvolumenform auf S^2 überein. △

Wir wollen ab nun die Einsteinsche Summenkonvention einführen.

Definition 1.10. *Kommt ein Index lokaler Koordinaten in einem Ausdruck doppelt vor, dabei einmal oben und einmal unten, so wird über ihn summiert.*

Eine Riemannsche Metrik wird in lokalen Koordinaten nun also durch

$$g = g_{ij} dz^i \otimes dz^j$$

dargestellt.

Definition 1.11.
(i) *Sei* (M, g) *eine Riemannsche Mannigfaltikgeit. Wir nennen zwei Tangentialvektoren* $v, w \in T_x M$ *zueinander orthogonal, wenn* $g(v \otimes w) = 0$ *gilt.*
(ii) *Weiter bezeichnen wir die von* g *induzierte Norm auf* $T_x M$ *mit* $\|.\|_g$ *(oder nur* $\|.\|$*, wenn* g *aus dem Kontext hervorgeht).*
(iii) g *induziert auch ein Skalarprodukt auf* $T_x M^*$*, indem man wieder* $g(x)$ *als Isomorphismus*

$$\tilde{g}(x) : T_x M \longrightarrow T_x M^*$$

wie oben auffasst. Das Skalarprodukt $g(x)$ *auf* $T_x M$ *induziert dann ein Skalarprodukt* $(\tilde{g}(x)^{-1})^* g(x)$ *auf* $T_x M^*$ *via*

$$(\tilde{g}(x)^{-1})^* g(x)(\omega_1 \otimes \omega_2) := g(x)(\tilde{g}(x)^{-1}(\omega_1) \otimes \tilde{g}(x)^{-1}(\omega_2))$$

für alle $\omega_1, \omega_2 \in T_xM^*$.

In lokalen Koordinaten gilt: Ist $(g^{ij})_{i,j}$ die inverse Matrix zu $(g_{ij})_{i,j}$, so gilt

$$(\tilde{g}(x)^{-1})^* g(x) = g^{ij} \frac{\partial}{\partial z^i} \otimes \frac{\partial}{\partial z^j}.$$

Beweis. Rechnen wir zunächst die Abbildung $\tilde{g}$ in lokalen Koordinaten aus. Offenbar gilt $\tilde{g}(\frac{\partial}{\partial z^i})(\frac{\partial}{\partial z^j}) = g_{ij}$, d.h.

$$\tilde{g}(\frac{\partial}{\partial z^i}) = g_{ij} dz^j,$$

wird also in den Basen $\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}$ von T_xM und $dz^1, \dots, dz^n$ von T_xM^* durch die Matrix $(g_{ij})_{i,j}$ gegeben. Sind wie im Satz g^{ij} die Einträge der inversen Matrix, so gilt

$$\tilde{g}^{-1}(dz^i) = g^{ij} \frac{\partial}{\partial z^j}.$$

Bemerke, dass nach Definition der g^{ij} gilt

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_{ik}$$

(Einsteinsche Summenkonvention!).

Damit haben wir (unter Weglassung des Punktes x)

$$\begin{aligned} (\tilde{g}^{-1})^* g(dz^i \otimes dz^j) &= g(\tilde{g}^{-1}(dz^i) \otimes \tilde{g}^{-1}(dz^j)) \\ &= g(g^{ik} \frac{\partial}{\partial z^k} \otimes g^{jl} \frac{\partial}{\partial z^l}) \\ &= g^{ik} g_{kl} g^{lj} = \delta_{il} g^{lj} = g^{ij}. \end{aligned}$$

Somit haben wir die Aussage bewiesen. □

2. Der Hodge-Operator

Nun haben wir also die gesamte Integrationstheorie auf Riemmannschen Mannigfaltigkeiten zur Verfügung. Um sie angemessen darzustellen, benötigen wir den Hodge-Operator. Wenn wir von einer Orthonormalbasis von T_xM^* reden, meinen wir dies immer bezüglich des Skalarprodukts $(\tilde{g}^{-1})^* g$, d.h. $\omega_1, \dots, \omega_n$ ist eine Orthonormalbasis von T_xM^*, wenn

$$(\tilde{g}^{-1})^* g(\omega_i \otimes \omega_j) = \delta_{ij}$$

gilt; in lokalen Koordinaten mit $\omega_i = \omega_{ik} dz^k$ bedeutet dies

$$g^{kl} \omega_{ik} \omega_{jl} = \delta_{ij}.$$

Mit den Matrizen $G := (g_{ij})$ und $A := (\omega_{ij})$ wird aus

$$\delta_{kl} = g^{ij} \omega_{ik} \omega_{jl}$$

die Gleichung

$$\mathrm{id} = A^t G^{-1} A$$

und durch Betrachten der Determinanten

$$\det G = (\det A)^2.$$

Damit ist

$$\omega_1 \wedge \dots \omega_n = \det A dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n = \pm \sqrt{\det G} dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n = \pm \Omega_g$$

und die Orthonormalbasis $\omega_1, \dots, \omega_n$ ist genau dann orientiert, wenn

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n = \Omega_g.$$

Satz 2.1. *Sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es gibt genau eine lineare Abbildung*

$$\star_x : \Lambda^r T_x M^* \longrightarrow \Lambda^{n-r} T_x M^*,$$

so dass für jede orientierte Orthonormalbasis $\omega_1, \ldots, \omega_n \in T_x M^*$ bzgl. g (orientiert heisst: $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n = \Omega_g$) gilt

$$*_x(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r) = \omega_{r+1} \wedge \cdots \wedge \omega_n.$$

Die dadurch gegebene Abbildung

$$* : \mathcal{A}^r(M) \longrightarrow \mathcal{A}^{n-r}(M)$$

heißt Hodge-Operator. Es gilt

$$\star(f\omega) = f \star \omega$$

für alle $f \in C^\infty(M), \omega \in \mathcal{A}^r(M)$.

In lokalen Koordinaten gilt für $\omega = \omega_{i_1 \ldots i_r} dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_r} \in \mathcal{A}^r(U)$

$$(\star\omega)_{i_{r+1}\ldots i_n} = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S'_r} \operatorname{sgn}(\sigma) \sqrt{\det(g_{ij})_{i,j}} g^{\sigma(1)m_1} \cdots g^{\sigma(r)m_r} \omega_{m_1 \ldots m_r},$$

wobei

$$S'_r = \{\sigma \in S_n | \sigma(j) = i_j \ \forall \ r+1 \leq j \leq n\}.$$

Beweis. Die Aussge ist nicht trivial. Der Beweis verlangt einige Kunst an Indexdomptur und soll hier nicht gezeigt werden. □

Bemerkung 2.2. (i) $\star\star = (-1)^{r(n-r)}\mathrm{id}$ auf r-Formen.
(ii) $\star\Omega_g = 1, \star 1 = \Omega_g$.
(iii) $\alpha \wedge \star\beta = \beta \wedge \star\alpha$ für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^r(M)$. (Beweis siehe unten)

◇

Dies verallgemeinert den Hodge-Stern, den wir im zweiten Semester auf $\mathbb{R}^3$ kennengelernt haben.

Beispiel 2.3. Wir betrachten S^2 mit der von der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^3$ induzierten Metrik. Da in Kugelkoordinaten (φ, θ)

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} \cos^{-2}\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

folgt, dass

$$\omega_1 := \cos\theta d\varphi \text{ und } \omega_2 := d\theta$$

eine orientierte Orthonormalbasis von $(T_x S^2)^*$ für alle $x \in S^2 \setminus \{\pm(0,0,1)\}$ ist. Also gilt

$$\star d\varphi = \frac{1}{\cos\theta} \star \omega_1 = \frac{1}{\cos\theta}\omega_2 = \frac{d\theta}{\cos\theta}$$

und

$$\star d\theta = -\omega_1 = -\cos\theta d\varphi,$$

da $\{\omega_2, -\omega_1\}$ wieder eine orientierte Orthonormalbasis ist. △

Proposition 2.4. *Sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Der Hodge-Stern erlaubt die Einführung eines globalen Skalarproduktes*

$$< \alpha, \beta >:= \int_M \alpha \wedge \star\beta$$

auf $\mathcal{A}_0^r(M)$.

Beweis. Mit Benutzung einer Teilung der Eins genügt es, die Aussage lokal in einer Karte zu beweisen. Daher dürfen wir annehmen, es gibt

$$\omega^1, \ldots, \omega^n \in \mathcal{A}^1(M),$$

die in allen Punkten $x \in M$ eine Orthonormalbasis von T_xM^* bilden. Die Formen α, β haben die Form

$$\alpha = \alpha_{i_1 \ldots i_r} \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r}, \beta = \beta_{i_1 \ldots i_r} \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r}$$

mit $\alpha_{i_1 \ldots i_r}, \beta_{i_1 \ldots i_r} \in C^\infty(M)$. Hier sollen die Indizes aufsteigend sortiert sein. Damit gilt

$$\alpha \wedge \star\beta = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \alpha_{i_1 \ldots i_r} \beta_{i_1 \ldots i_r} \Omega_g = \beta \wedge \star\alpha$$

und daher insbesondere

$$< \alpha, \beta >=< \beta, \alpha > .$$

Letztlich folgt

$$< \alpha, \alpha >= \int_M \left(\sum_{i_1 < \cdots < i_r} \alpha^2_{i_1 \ldots i_r} \right) \Omega_g > 0,$$

wenn $\alpha \neq 0$. Die $\mathbb{R}$-Linearität von $<, >$ ist klar. □

Nun können wir das äußere Differential mit dem Hodge-Stern verknüpfen, um

$$\delta : \mathcal{A}^r(M) \longrightarrow \mathcal{A}^{r-1}(M), \delta\omega := (-1)^{(r+1)(n-r)+1} \star d \star \omega$$

zu erhalten. δ heißt Kodifferential. Die Wahl des Vorzeichens ist so, dass der Laplace-Operator einfach geschrieben werden kann.

3. Der Laplace-Operator

Interessant wird dies durch die Einführung des Laplace-Operators auf Formen.

Definition 3.1. *Sei (M, g) eine orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit.*

(i) *Der Operator*

$$\Delta : \mathcal{A}^r(M) \longrightarrow \mathcal{A}^r(M), \omega \mapsto d\delta\omega + \delta d\omega$$

heißt Laplace-Operator. Auf $C^\infty(M) = \mathcal{A}^0(M)$ hat Δ die lokale Darstellung

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})_{i,j}}} \frac{\partial}{\partial z^k} \left(\sqrt{\det(g_{ij})_{i,j}} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial z^l} \right).$$

(ii) *Eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ heißt harmonisch, wenn $\Delta f = 0$ gilt.*

Beispiel 3.2. (i) Ist $M = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik $g = \sum_{i=1}^n dz^i \otimes dz^i$, so vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{(\partial z^i)^2}.$$

(ii) Ist $M = S^2$ und g die (euklidische) Standardmetrik, so ist in Kugelkoordinaten

$$\Delta f = -\frac{1}{\cos^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \tan\theta \frac{\partial f}{\partial\theta}.$$

△

Aus dem Satz von Stokes lassen sich nun metrische Integralsätze folgern.

Satz 3.3. (Green'sche Formeln) *Sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand und $f, h \in C_0^\infty(M)$. Es gilt*

(i) $\int_M \Delta f \cdot \Omega_g = -\int_{\partial M} \star df$,

(ii) $\int_{\partial M} h \star df = -\int_M h\Delta f \cdot \Omega_g + < dh, df >$,

(iii) $\int_M (f\Delta h - h\Delta f)\Omega_g = \int_{\partial M} h \star df - f \star dh$.

Beweis. Offenbar folgt (i) aus (ii). Um (ii) zu beweisen rechnen wir

$$\begin{aligned}\int_M h\Delta f\Omega_g &= -\int_M h \star d \star df \cdot \Omega_g = -< \Omega_g, hd \star df >= -< hd \star df, \Omega_g > \\ &= -\int_M hd \star df \overset{\text{part. Int.}}{=} -\int_{\partial M} h \star df + \int_M dh \wedge \star df \\ &= -\int_{\partial M} h \star df + < dh, df >,\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Um (iii) zu beweisen, muss man nur noch (ii) zweimal anwenden:

$$\int_M (f\Delta h - h\Delta f)\Omega_g = \int_{\partial M} -f \star dh + h \star df - < df, dh > + < dh, df >= \int_{\partial M} h \star df - f \star dh.$$

□

Mit Hilfe dieser Identitäten können wir nun sofort Aussagen zur Lösbarkeit der der Poisson-Gleichung

$$\Delta u = f$$

auf kompakten Mannigfaltigkeiten machen.

Korollar 3.4. *Sei (M, g) eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $u, f \in C^\infty(M)$.*

(i) *Jede harmonische Funktion auf M ist konstant.*
(ii) *Ist $\Delta u = f$, so ist f mittelwertfrei, d.h. $\int_M f\Omega_g = 0$.*
(iii) *Ist λ ein Eigenwert von Δ, d.h. $\Delta u = \lambda u$ für ein $u \neq 0$, so ist $\lambda \geq 0$.*

Beweis. Sei f harmonisch. Aus 3.3(ii) folgt mit $h = f$

$$0 =< df, df >$$

und damit $df = 0$. Das bedeutet, dass f konstant ist.

Ist $\Delta u = f$, so benutzt man 3.3(i) für u um zu sehen

$$\int_M f\Omega_g = \int_M \Delta u\Omega_g = 0.$$

Wiederum 3.3(ii) impliziert, falls $\Delta u = \lambda u$ für ein $u \neq 0$, mit $h = f = u$

$$0 = -\lambda \int_M u^2\Omega_g + < du, du >,$$

also

$$\lambda = \frac{< du, du >}{\int_M u^2\Omega_g} \geq 0.$$

□

Bemerkung 3.5. (i) Korollar 3.4(i) ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Liouville aus der Funktionentheorie.
(ii) $\Delta u = \lambda u$ ist die zeitunabhängige Schrödingergleichung im Vakuum.

◇

KAPITEL 4

Literaturempfehlungen

(i) Alt, W., *Lineare Funktionalanalysis*, Springer 1985, ISBN 3-540-15280-6
(ii) Amann, H., Escher, J., *Analysis III*, Birkhäuser 2001, ISBN 3-7643-6613-3,
(iii) Conlon, L., *Differentiable manifolds*, Teile aus Chapters 1,2,3,6,8,10 , Reprint of the 2001 second edition, Modern Birkhäuser Classics ,2008, ISBN 978-0-8176-4766-7
(iv) Lang, S., *Differentiable and Riemannian Manifolds*, Springer 1995, ISBN 3-540-94338-2