PD Dr. Marco Kühnel
Dr. Daniel Greb

WiSe 2010/2011

Übungsaufgaben zur Funktionentheorie II

1. Blatt

Abgabetermin: Do, 28.10.2010, in der Vorlesung

Aufgabe 1-1 (4 Punkte):
Es sei $\hat{\mathbb{C}}$ die Riemannsche Zahlenkugel und

$$S^2 = \{(w,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |w|^2 + t^2 = 1\}$$

die 2-Sphäre und $N \in S^2$ der Nordpol. Die *stereographische Projektion* ist wie folgt definiert: zu jedem Punkt $x \in S^2 \setminus \{N\}$ betrachte man die Gerade L_x durch N und x. Diese trifft die Ebene $\{t = 0\} \cong \mathbb{C}$ in exakt einem Punkt, den wir mit $\pi(x)$ bezeichen.

a) Berechnen Sie eine Formel für $\pi(x)$.
b) Zeigen Sie, dass durch die Vorschrift $\bar{\pi} : S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$, $\bar{\pi}(x) = \pi(x)$ für $x \neq N$ und $\bar{\pi}(N) = \infty$ eine stetige Abbildung definiert wird.
c) Zeigen Sie, dass $\bar{\pi}$ bijektiv ist, indem Sie eine Umkehrabbildung explizit angeben.
d) Zeigen Sie, dass $\bar{\pi}$ ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 1-2 (4 Punkte):
Es sei $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter in $\mathbb{C}$ und $T = \mathbb{C}/\Gamma$. Geben Sie mit Beweis einen expliziten Homöomorphismus von T nach $S^1 \times S^1$ an.

Aufgabe 1-3 (4 Punkte):
Es sei X ein topologischer Hausdorffraum und $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ zwei Atlanten auf X. Wir definieren: $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$ genau dann, wenn $\mathcal{A}$ biholomorph verträglich mit $\mathcal{A}'$ ist. Zeigen Sie, dass hierdurch eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Atlanten von X definiert wird.

Aufgabe 1-4 (4 Punkte):
Zeigen Sie, dass jedes Gitter $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist.