PD Dr. Marco Kühnel
Dr. Daniel Greb

WiSe 2010/2011

Übungsaufgaben zur Funktionentheorie II

10. Blatt

Abgabe: Di in der Vorlesung (Do-Gruppe) und Do in der Vorlesung (Di-Gruppe)

Aufgabe 10-1 (**4 Punkte**) Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $A \subset G$ nirgends dicht, $G \setminus A$ zusammenhängend und $U \subset G$ offen. Zeigen Sie, dass $(G \setminus A) \cup U$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 10-2 (**4 Punkte**) Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $f_j : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann für jedes $\nu \in \mathbb{N}^n$ auch $D^\nu f_j$ lokal gleichmäßig gegen $D^\nu f$ konvergiert.

Aufgabe 10-3 (**4 Punkte**) Sei $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so dass $\nu \in \mathbb{N}^n$ und $C > 0$ existieren mit

$$|f(z)| \leq C(|z^\nu| + 1).$$

Zeigen Sie, dass f ein Polynom mit Multigrad höchstens ν ist.

Der Multigrad eines Polynoms $\sum_{l=1}^k a_{\nu(l)} z^{\nu(l)}$, gegeben durch die Daten $\nu : \{1, \ldots, k\} \longrightarrow \mathbb{N}^n$ und $a_{\nu(l)} \in \mathbb{C}^*$, ist $\sup_{l=1,\ldots,k} \nu(l)$ in der natürlichen partiellen Ordnung von $\mathbb{N}^n$, d.h. $\nu \geq \mu :\iff \nu_j \geq \mu_j$ für alle j. Das Supremum ist die kleinste obere Schranke. Zum Beispiel ist der Multigrad von $z_1^2 + 3z_1 z_2 + z_2^3$ (für $n = 2$) der Multiindex $(2, 3)$.

Aufgabe 10-4 (**2 Punkte**) Seien $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $B \subset G$ eine irgendwo dichte Menge, d.h. $\mathring{\overline{B}} \neq \emptyset$. Zeigen Sie folgende (leichte) Verallgemeinerung des Identitätssatzes: Sind $f, g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $f|B = g|B$, dann gilt schon $f = g$.

Aufgabe 10-5 (**4 Punkte**) Zeigen Sie, dass die analytischen Mengen in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ genau $\emptyset, G$ und die in G diskreten Mengen sind.

Aufgabe 10-6 (**2 Punkte**) Zeigen Sie, dass $A := \bigcup_{a \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}} \{z_1 = a\} \cup \{z_2 = a\} \subset \mathbb{C}^2$ eine analytische Menge ist.

bitte wenden

Aufgabe 10-7 (**3 Punkte**) Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen analytisch sind (mit Beweis):

(1) $T_\rho(0) \subset \mathbb{C}^n$,
(2) $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | \ z_1 = 0, |z_2| < 1\} \subset B_1(0)$
(3) $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | \ z_1 = 0, |z_2| \leq 1\} \subset \mathbb{C}^2$

Hinweis: Um eine negative Entscheidung zu begründen, fixieren Sie ausgewählte Koordinaten so, dass das Problem eindimensional wird.

Aufgabe 10-8 (**2 Punkte**) Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $f_i \in \mathscr{O}(G), i = 1, \ldots, m$ und $A := \{z \in G | \ f_1(z) = \cdots = f_m(z) = 0\}$. Es bezeichne

$$J(z) := (\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(z))_{ij}.$$

Sei $q := \max_{z \in A} \operatorname{rk} J(z)$. Zeigen Sie, dass

$$Sing(A) := \{z \in A | \ \operatorname{rk} J(z) < q\}$$

eine analytische Menge in G ist.

Aufgabe 10-9 (**3 Punkte**) Zeigen Sie, dass die Menge $A := \{(t^2, t^3, t^5) | \ t \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^3$ eine analytische Menge mit $\operatorname{codim}_x A = 2$ für alle $x \in A$ ist.

◇

Bei diesem Blatt werden **14** Punkte als 100% gewertet. Es werden von Ihnen also nur 7 Punkte in diesem Blatt erwartet und Sie haben die Chance auf 14 Bonuspunkte über die volle Punktzahl hinaus.

◇

Frohe Weihnachten und ein erfolgreiches Jahr 2011!