PD Dr. Marco Kühnel
Dr. Daniel Greb

WiSe 2010/2011

Übungsaufgaben zur Funktionentheorie II

13. Blatt

Abgabe: Di in der Vorlesung (Do-Gruppe) und Do in der Vorlesung (Di-Gruppe)

Aufgabe 13-1 (1+3 Punkte) Wir betrachten die Gebiete $G_1 := P_1(0) \setminus \{0\}$ und $G_2 := \mathbb{C} \setminus \overline{P_1(0)}$ in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass G_1 und G_2 zueinander biholomorph sind, aber nicht eingebettet biholomorph.

Aufgabe 13-2 (2+2 Punkte) Seien G_1 und G_2 zueinander eingebettet biholomorphe Gebiete in $\mathbb{C}^n$. Zeigen Sie nur mit Hilfe der entsprechenden Definition:

(1) G_1 ist ein Holomorphiegebiet $\iff$ G_2 ist ein Holomorphiegebiet.
(2) G_1 ist pseudokonvex $\iff$ G_2 ist pseudokonvex.

Der Definition von Holomorphiegebieten und deren Charakterisierung als pseudokonvex sieht man nicht an, dass die Eigenschaft Holomorphiegebiet zu sein (uneingebettet!) biholomorph invariant ist. Aus der (in der Vorlesung unbewiesenen) Charakterisierung als die Gebiete, die nur global definierte analytische Mengen zulassen, folgt dies aber:

Aufgabe 13-3 (2 Punkte) Seien G_1 und G_2 zueinander biholomorphe Gebiete in $\mathbb{C}^n$. Zeigen Sie: Genau dann ist jede analytische Menge in G_1 global definiert, wenn dies für G_2 stimmt.

Für die restlichen Aufgaben dürfen Sie (müssen aber nicht) verwenden, dass die Eigenschaft Holomorphiegebiet zu sein biholomorph invariant ist.

Aufgabe 13-4 (2+2 Punkte) Sei $n \geq 2$ und $G \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie, dass weder G noch die unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}^n \setminus \overline{G}$ biholomorph zu $\mathbb{C}^n$ sind.

Aufgabe 13-5 (2 Punkte) Seien $A, B \subset \mathbb{C}^n$ analytische Mengen von Kodimension mindestens 2. Zeigen Sie: Die Gebiete $\mathbb{C}^n \setminus A$ und $\mathbb{C}^n \setminus B$ sind genau dann biholomorph zueinander, wenn sie eingebettet biholomorph zueinander sind.