PD Dr. Marco Kühnel WiSe 2010/2011
Dr. Daniel Greb

Übungsaufgaben zur Funktionentheorie II

14. Blatt

Abgabe: Di in der Vorlesung (Do-Gruppe) und Do in der Vorlesung (Di-Gruppe)

Aufgabe 14-1 (3 Punkte) Seien $G_1, \ldots, G_n \subset \mathbb{C}^n$ Holomorphiegebiete, so dass $\bigcap_{i=1}^n G_i$ zusammenhängt. Zeigen Sie, dass dann $\bigcap_{i=1}^n G_i$ ein Holomorphiegebiet ist.

Hinweis: Wählen Sie eine geeignete Charakterisierung von Holomorphiegebieten aus.

Aufgabe 14-2 (3+3 Punkte) Sei $G := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | \; |z_1| < |z_2| < 1\}$, das sogenannte Hartogs'sche Dreieck. Weiter sei $G^\varepsilon := \{z \in \mathbb{C}^2 | \; dist(z, G) < \varepsilon\}$. Zeigen Sie:

(1) G ist ein Holomorphiegebiet.
(2) Für alle $\varepsilon > 0$ gilt: Ist $\tilde{G}$ ein Holomorphiegebiet, so dass $G^\varepsilon \subset \tilde{G}$, so folgt $P_{(1,1)}(0) \subset \tilde{G}$.
Hinweis: Wenden Sie den Hartogs'schen Kontinuitätssatz geeignet an.

Aufgabe 14-3 (4 Punkte) Seien $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $A := \{f_1 = \cdots = f_m = 0\}$ und $\mathcal{F} := \{f_1, \ldots, f_m\}$. Zeigen Sie, dass für alle $\rho \in \mathbb{R}_+^n$ die Menge

$$U_\rho^{\mathcal{F}}(A) := \{z \in \mathbb{C}^n | \; |f_i(z)| < \rho_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n\}$$

eine holomorph-konvexe Umgebung von A ist. Zeigen Sie weiter: Sind nicht alle f_i konstant, so ist $U_\rho^{\mathcal{F}}(A)$ nicht biholomorph zu $\mathbb{C}^n$.

Aufgabe 14-4 (2+2 Punkte) Sei $A \subset \mathbb{C}^n$ analytisch. Zeigen Sie:

(1) Ist $A = \{f = 0\}$ für ein $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C}^n)$, so ist $\mathbb{C}^n \setminus A$ Steinsch.
(2) Ist $\operatorname{codim} A \geq 2$, so ist $\mathbb{C}^n \setminus A$ nicht Steinsch.