PD Dr. Marco Kühnel
Dr. Daniel Greb

WiSe 2010/2011

Übungsaufgaben zur Funktionentheorie II

3. Blatt

Abgabetermin: Di, 9.11.2010, in der Vorlesung

Aufgabe 3-1 (4 Punkte):
Es seien X und Y zwei Riemannsche Flächen und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie: f ist genau dann holomorph, wenn für jede offene Menge $V \subset Y$ und für jede holomorphe Funktion $\psi \in \mathcal{O}(V)$ der Rückzug $f^*(\psi) = \psi \circ f : f^{-1}(V) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf $f^{-1}(V)$ ist.

Aufgabe 3-2 (4 Punkte):
Es seien f und g zwei homogene Polynome in $\mathbb{C}[x, y, z]$ vom gleichen Grad. Es sei $X \subset \mathbb{P}_2$ eine glatte ebene projektive Kurve. Es sei $[x_0 : y_0 : z_0]$ in X mit $g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\psi([x : y : z]) = \frac{f(x,y,z)}{g(x,y,z)}$ eine wohl-definierte holomorphe Funktion (auf X) in der Nähe von $[x_0 : y_0 : z_0]$ ist.

Aufgabe 3-3 (4 Punkte):
Es sei

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C}).$$

Zeigen Sie, dass die durch die Vorschrift

$$z \mapsto f_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

auf $\mathbb{C} \setminus \{cz + d = 0\}$ definierte holomorphe Funktion zu einer biholomorphen Abbildung $F_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ fortgesetzt werden kann. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Psi : SL_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(\hat{\mathbb{C}}), A \mapsto F_A$ ein Gruppenhomomorphismus von $SL_2(\mathbb{C})$ in die Gruppe der biholomorphen Selbstabbildungen von $\hat{\mathbb{C}}$ ist.

Aufgabe 3-4 (4 Punkte):

a) Es seien Γ und Γ' zwei Gitter. Es sei $\alpha \in \mathbb{C}^*$ so dass $\alpha\Gamma \subset \Gamma'$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $z \mapsto \alpha z$ eine holomorphe Abbildung $\mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}/\Gamma'$ induziert und dass diese induzierte Abbildung genau dann biholomorph ist, wenn $\alpha\Gamma = \Gamma'$.
b) Zeigen Sie, dass jeder Torus $X = \mathbb{C}/\Gamma$ zu einem Torus der Form $X(\tau) := \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ biholomorph ist, wobei $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.