PD Dr. Marco Kühnel
Dr. Daniel Greb WiSe 2010/2011

Übungsaufgaben zur Funktionentheorie II

4. Blatt

Abgabe: Di in der Vorlesung (Do-Gruppe) und Do in der Vorlesung (Di-Gruppe)

Aufgabe 4-1 (4 Punkte):
Es sei $X = \{f(x,y) = 0\}$ eine glatte ebene affine Kurve in $\mathbb{C}^2$. Es sei $\pi : X \to \mathbb{C}, (x,y) \mapsto x$ die Projektion auf die erste Koordinate. Wir nehmen an, dass diese nicht-konstant ist (was heißt dies geometrisch?). Zeigen Sie: $mult_p(\pi) \geq 2$ genau dann, wenn $\frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$.

Aufgabe 4-2 (4 Punkte):
Es seien $p_1, \ldots, p_n$, $n \geq 1$, Punkte auf einer kompakten Riemannschen Fläche X und $Y := X \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$. Es sei $f \in \mathscr{O}(Y)$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion. Zeigen Sie: jede Umgebung eines jeden $c \in \mathbb{C}$ schneidet das Bild von f (mit anderen Worten: $f(Y)$ kommt beliebig nahe an jeden Punkt $c \in \mathbb{C}$ heran).

Aufgabe 4-3 (6 = 2 + 1 + 1 + 2 Punkte):
Wir betrachten glatte ebene projektive Kurven von niedrigem Grad. Glatte ebene projektive Kurven vom Grad eins heißen *Geraden* und glatte ebene projektive Kurven vom Grad zwei nennen wir *Koniken*.

a) Zeigen Sie, dass jede Gerade biholomorph zu $\hat{\mathbb{C}}$ ist.
b) Es sei $T \in GL_3(\mathbb{C})$ und X_A sei die Konik, die durch die quadratische Form assoziiert zur symmetrischen Matrix A gegeben ist. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\phi_T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2, [x : y : z] \mapsto [(T \cdot (x,y,z)^t)^t]$ eine biholomorphe Abbildung von X_A auf X_{T^tAT} definiert.
c) Nutzen Sie b) um zu zeigen, dass jede Konik biholomorph zu
$$\{[x : y : z] \in \mathbb{P}_2 \mid xy - z^2 = 0\}$$
ist.
d) Nutzen sie c) um zu zeigen, dass jede Konik biholomorph zu $\hat{\mathbb{C}}$ ist.

Aufgabe 4-4 (4 Punkte):
Beweisen Sie mit Hilfe der Theorie holomorpher Abbildungen auf kompakten Riemannschen Flächen:

a) **Satz von Liouville:** Jede beschränkte Funktion $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ ist konstant.
b) **Fundamentalsatz der Algebra:** Es sei $f \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom von Grad größer oder gleich eins. Dann hat f eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.