PD Dr. Marco Kühnel
Dr. Daniel Greb WiSe 2010/2011

Übungsaufgaben zur Funktionentheorie II

5. Blatt

Abgabe: Di in der Vorlesung (Do-Gruppe) und Do in der Vorlesung (Di-Gruppe)

Aufgabe 5-1 (4 Punkte):
Es sei Γ ein Gitter in $\mathbb{C}$ und $X = \mathbb{C}/\Gamma$ mit Projektion $\pi : \mathbb{C} \to X$.

a) Wir bezeichnen mit $\mathscr{M}(\mathbb{C})^\Gamma$ die Γ-invarianten meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ (diese werden klassisch als *elliptische Funktionen* bezeichnet). Dies ist ein Körper. Zeigen Sie, dass durch
$$f \mapsto f \circ \pi$$
ein Körperisomorphismus $\mathscr{M}(X) \to \mathscr{M}(\mathbb{C})^\Gamma$ definiert wird.

b) Zeigen Sie, dass es keine elliptische Funktion gibt, die modulo Γ einen einzigen Pol der Ordnung eins hat. Erinnerung: f meromorph auf Y, $p \in Y$ Pol. Dann ist die Ordnung von f am Pol p definiert als $mult_p(f)$, wobei f als holomorphe Abbildung nach $\hat{\mathbb{C}}$ betrachtet wird.

Aufgabe 5-2 (8 Punkte):
Es sei Γ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Die *Weierstraßsche $\wp$-Funktion* zum Gitter Γ ist definiert durch
$$\wp_\Gamma(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$
Zeigen Sie, dass $\wp_\Gamma$ eine Γ-invariante meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ definiert, die Pole genau in den Punkten von Γ hat. Diese Pole haben die Ordnung zwei (vgl. mit Aufgabe 5-1 b)). Eine Möglichkeit, dies zu beweisen, besteht aus folgenden Schritten:

a) Beweisen Sie: die Reihe
$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$
konvergiert dann und nur dann, wenn $\alpha > 1$ ist. Eine Möglichkeit dies zu zeigen ist der Vergleich mit der Konvergenz des folgenden Integrals:
$$\int_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}.$$

b) Es sei $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie: die Reihe
$$\sum_{\omega \in \Gamma \setminus \{0\}} |\omega|^{-s}, s > 2$$
konvergiert. Tipp: Wegen a) genügt es zu zeigen, dass eine nur von ω_1 und ω_2 abhängige Konstante $\delta > 0$ existiert mit $|m\omega_1 + n\omega_2|^2 \geq \delta(m^2+n^2)$.

c) Es sei $M \subset \Gamma \setminus \{0\}$ eine Menge von Gitterpunkten. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{\omega \in M} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

in $\mathbb{C} \setminus M$ normal und stellt dort eine analytische Funktion dar. Tipp: Schreiben Sie

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \frac{|z||z-2\omega|}{|\omega|^2|z-\omega|^2}.$$

Schätzen sie letzteren Term für $z \in \bar{\Delta}_r(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ und für fast alle ω gegen einen Term der Form const.(r) $\cdot |\omega|^{-3}$ ab.

d) Zeigen Sie nun die Γ-Invarianz von $\wp_\Gamma$. Betrachten Sie hierzu zuerst die Ableitung

$$\wp_\Gamma'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Gamma} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

und zeigen Sie, dass dies eine Γ-invariante meromorphe Funktion (mit Polen in den Gitterpunkten) ist. Benutzen Sie dann dies sowie die Tatsache, dass $\wp_\Gamma$ eine gerade Funktion ist (d.h. $\wp_\Gamma(-z) = \wp_\Gamma(z)$), um Γ-Invarianz von $\wp$ zu folgern.

Aufgabe 5-3 (4 Punkte):
Es sei $f : X \to Y$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung zwischen zwei Riemannschen Flächen.

a) Zeigen Sie: Falls $Y \cong \mathbb{P}_1$, und $\deg(f) \geq 2$, dann ist die Menge R_f der Verzweigungspunkte von f nicht leer.
b) Falls X und Y beide Geschlecht eins haben, dann ist $R_f = \emptyset$.
c) Zeigen Sie, dass immer $g(Y) \leq g(X)$ gilt.
d) Zeigen Sie: Falls $g(X) = g(Y) \geq 2$, dann ist f ein Isomorphismus.

Aufgabe 5-4 (4 Punkte):
Betrachten Sie $f(z) = \frac{z^3}{1-z^2}$ als meromorphe Funktion auf der Riemannschen Zahlensphäre $\hat{\mathbb{C}}$ (äquivalent als holomorphe Abbildung von $\hat{\mathbb{C}}$ nach $\hat{\mathbb{C}}$). Finden Sie alle Punkte $p \in R_f$ und $f(R_f)$. Zeigen Sie, dass $\deg(f) = 3$, und verifizieren Sie explizit Hurwitz' Formel für die Abbildung f.