PD Dr. Marco Kühnel
Dr. Daniel Greb

WiSe 2010/2011

Übungsaufgaben zur Funktionentheorie II

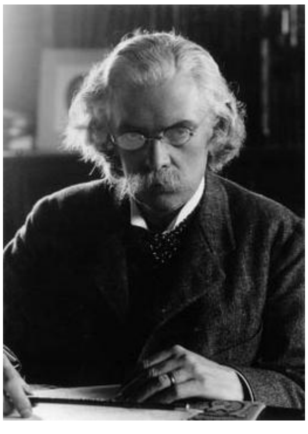
6. Blatt

Abgabe: Di in der Vorlesung (Do-Gruppe) und Do in der Vorlesung (Di-Gruppe)

Aufgabe 6-1 (6 Punkte):
In dieser Aufgabe formalisieren wir den in der Vorlesung vorgestellten Zugang zur Konstruktion von meromorphen Funktionen, die sogenannten Mittag-Leffler-Verteilungen.

Sei X eine Riemannsche Fläche und $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Sei $\mathscr{M}$ die Garbe der meromorphen Funktionen auf X. Eine Cokette $\mu = (f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{M})$ heißt *Mittag-Leffler-Verteilung*, falls die Differenzen $f_i - f_j$ in $U_i \cap U_j$ holomorph sind, d.h. $\delta_{\mathscr{M}}(\mu) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{O}) \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{M})$. Die Funktionen f_i und f_j haben also auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich dieselben Hauptteile. Unter einer *Lösung* von μ versteht man eine globale meromorphe Funktion $f \in \mathscr{M}(X)$, die dieselben Hauptteile wie μ besitzt, d.h. $f|_{U_i} - f_i \in \mathscr{O}(U_i)$ für alle $i \in I$. Wir bezeichnen mit $[\delta_{\mathscr{M}}(\mu)] \in H^1(X, \mathscr{O})$ die durch den Cozyklus $\delta_{\mathscr{M}}(\mu)$ repräsentierte Cohomologieklasse.

a) Zeigen Sie, dass eine Mittag-Leffler-Verteilung μ genau dann eine Lösung besitzt, wenn $[\delta_{\mathscr{M}}(\mu)] = 0 \in H^1(X, \mathscr{O})$.
b) Zeigen Sie, dass auf jeder Riemannschen Fläche von Geschlecht größer oder gleich eins eine nicht-lösbare Mittag-Leffler-Verteilung existiert (vgl. Aufgabe 5-1b)), und folgern Sie, dass für jede solche Fläche $H^1(X, \mathscr{O}) \neq 0$.



Magnus Gösta Mittag-Leffler
* 16. März 1846 in Stockholm; † 7. Juli 1927 in Djursholm

Quelle: wikipedia.de

Aufgabe 6-2 (10 Punkte):
Schreiben Sie eine Zusammenfassung (zwei bis drei handgeschriebene Seiten) über Differentialformen auf offenen Mengen in $\mathbb{C}$, Integration und den Satz von Stokes. Stellen Sie hierbei den Zusammenhang zum Begriff des Kurvenintegrals her, wie er in der Funktionentheorie I eingeführt und diskutiert worden ist. Erläutern Sie zudem, wie man Cauchy's Integralsatz aus dem Satz von Stokes herleiten kann.

Lesen Sie dazu Kapitel I.6 und Kapitel II.3 aus:

Fischer, Lieb: Funktionentheorie, 8. Auflage, Vieweg, 2003

(die entsprechenden Seiten des Buches stehen auf der Website der Vorlesung im djvu-Format zum Download bereit).