PD Dr. Marco Kühnel
Dr. Daniel Greb

WiSe 2010/2011

Übungsaufgaben zur Funktionentheorie II

8. Blatt

Abgabe: Di in der Vorlesung (Do-Gruppe) und Do in der Vorlesung (Di-Gruppe)

Aufgabe 8-1 (5 Punkte): **(Urbild-Divisoren)**
Es sei $f : X \to Y$ eine nicht-konstante Abbildung Riemannscher Flächen, $q \in Y$ ein Punkt. Der *Urbild-Divisor* $f^*(q)$ ist der Divisor

$$f^*(q) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \mathrm{mult}_p(f) \cdot p.$$

Falls $D = \sum D(q) \cdot q$ ein Divisor auf Y ist, so definiere $f^*(D) = \sum D(q) \cdot f^*(q)$. Zeigen Sie:

a) Falls X und Y kompakt sind, so gilt, wenn man $f^*(D)$ als Funktion von X nach $\mathbb{Z}$ interpretiert, $f^*(D)(p) = \mathrm{mult}_p(f) \cdot D(f(p))$.
b) $f^* : \mathrm{Div}(Y) \to \mathrm{Div}(X)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
c) $f^*(\mathrm{HDiv}(Y)) \subset \mathrm{HDiv}(X)$.
d) Falls X und Y kompakt sind, dann gilt: $\deg(f^*(D)) = \deg(f) \cdot \deg(D)$ für alle $D \in \mathrm{Div}(Y)$.
e) Es sei $f : X \to \hat{\mathbb{C}}$ eine nicht-konstante meromorphe Funktion. Dann definieren wir den *Nullstellendivisor* von f als

$$\mathrm{div}_0(f) = \sum_{p \text{ mit } o(f,p)>0} o(f,p) \cdot p.$$

Zeigen Sie: $\mathrm{div}_0(f) = f^*(0)$.

Aufgabe 8-2 (2 Punkte): **(Schnitt-Divisoren)**
Es sei $X \subset \mathbb{P}_2$ eine glatte projektive ebene Kurve. Es sei $G \in \mathbb{C}[x,y,z]$ ein homogenes Polynom vom Grad d. Der *Schnittdivisor* $\mathrm{div}_X(G)$ oder $\mathrm{div}(G)$ von G auf X ist wie folgt definiert: sei $p \in X \cap \{G = 0\}$. Wähle ein homogenes Polynom $H \in \mathbb{C}[x,y,z]$ vom Grad d mit $p \notin \{H = 0\}$. Dann ist G/H eine meromorphe Funktion auf X, die in p verschwindet. Wir definieren: $\mathrm{div}(G)(p) = \mathrm{mult}_p(G/H)$. Für Punkte $q \notin \{G = 0\}$ setze $\mathrm{div}(G)(q) = 0$. Zeigen Sie:

a) Der soeben definierte Divisor $\mathrm{div}(G)$ hängt nicht von der Wahl der Polynome H ab.
b) Falls $G_1, G_2 \in \mathbb{C}[x,y,z]$ zwei homogene Polynome gleichen Grades sind, $X \not\subset \{G_2 = 0\}$, so gilt für die meromorphe Funktion $f = G_1/G_2$ auf X: $\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(G_1) - \mathrm{div}(G_2)$.

Falls G den Grad eins hat, so nennen wir $\mathrm{div}(G)$ einen *Hyperebenen-Divisor*.

Aufgabe 8-3: (4 Punkte) **(Lineare Äquivalenz von Divisoren)**
Zwei Divisoren D_1, D_2 auf einer Riemannschen Fläche heißen *linear äquivalent*, geschrieben $D_1 \sim D_2$, falls $D_1 - D_2 \in \mathrm{HDiv}(X)$. Zeigen Sie:

a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Div}(X)$.
b) $D \sim 0$ genau dann, wenn $D \in \mathrm{HDiv}(X)$.
c) Falls X kompakt ist, und $D_1 \sim D_2$, dann gilt $\deg(D_1) = \deg(D_2)$.
d) Es sei X eine glatte projektive ebene Kurve, $G_1, G_2 \in \mathbb{C}[x, y, z]$ homogen vom selben Grad. Dann gilt: $\mathrm{div}(G_1) \sim \mathrm{div}(G_2)$ und damit $\deg(\mathrm{div}(G_1)) = \deg(\mathrm{div}(G_2))$. Insbesondere haben je zwei Hyperflächen-Divisoren auf X denselben Grad.

Aufgabe 8-4: (6 = 3+2+1 Punkte) **(Der Satz von Bézout)**
Es sei $X \subset \mathbb{P}_2$ eine glatte ebene projektive Kurve. Der *Grad* von X ist definiert als

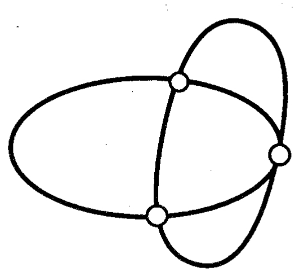
$$\deg(X) := \deg(G),$$

wobei G ein beliebiger Hyperebenen-Divisor auf X ist (vgl. Aufgabe 8-3d)). Zeigen Sie:

a) Falls $X = \{F = 0\}$ und F ist homogen vom Grad d, dann gilt $\deg(X) = d$.
Hinweise: Zum Beweis kann man annehmen, dass $G(x, y, z) = x$ und $[0 : 0 : 1] \notin X$. Dann gilt $\mathrm{div}(G) = \mathrm{div}(x/y)$ (warum?). Zeigen Sie nun, dass $\deg \mathrm{div}(x/y) = \deg(H)$, wobei $H : X \to \hat{\mathbb{C}}$ die durch $x/y \in \mathscr{M}(X)$ gegebene holomorphe Abbildung ist. Berechnen Sie diesen Grad, indem Sie ein Gleichungssystem für $H^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ allgemein, aufstellen.
b) Zeigen Sie den *Satz von Bézout*: Es sei $Y = \{G = 0\}$ eine weitere glatte projektive ebene Kurve in $\mathbb{P}_2$. Das Polynom G verschwinde nicht identisch auf X. Es sei $\deg(X) = d$ und $\deg(Y) = \deg(G) = e$. Dann gilt:

$$\deg(\mathrm{div}_X(G)) = \deg(X) \cdot \deg(Y) = d \cdot e.$$

Mit anderen Worten: X und Y schneiden sich in $\deg(X) \cdot \deg(Y)$ Punkten (wenn man Multiplizitäten zählt).
c) Geben Sie ein Beispiel für zwei glatte Koniken $X = \{F = 0\}$ und $Y = \{G = 0\}$ an, so dass $|\mathrm{Tr}(\mathrm{div}_X(G))| = 3$ (siehe Bild unten).



$2P_1 + P_2 + P_3$

Das war's ! Viel Spaß und Erfolg im zweiten Teil der Vorlesung!