PD Dr. Marco Kühnel
Dr. Daniel Greb WiSe 2010/2011

Übungsaufgaben zur Funktionentheorie II

9. Blatt

Abgabe: Di in der Vorlesung (Do-Gruppe) und Do in der Vorlesung (Di-Gruppe)

Aufgabe 9-1 (2 Punkte) Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $f_n : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen. Zeigen Sie: Die Folge f_n konvergiert lokal gleichmäßig genau dann, wenn $f_n|_K$ auf jedem Kompaktum $K \subset U$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 9-2 (10=5×2 Punkte) *(Das Problem mit Randwerten)* Sei $S^1 = \partial B_1$ die positiv orientierte Einheitskreislinie in $\mathbb{C}$, $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und

$$h : B_1 \longrightarrow \mathbb{C}, h(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

die durch das Cauchy-Integral gegebene holomorphe Funktion auf dem Einheitskreis. Wir wollen zeigen: Für alle $z_0 \in S^1$ gilt

$$\lim_{z \longrightarrow z_0, z \in B_1} \mathrm{Re}(h(z)) = \frac{1}{2}\left(f(z_0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})dt \right).$$

(Insbesondere sind die Randwerte von h im allgemeinen nicht durch f gegeben!). Beweisen Sie dafür die folgenden Teilschritte:

(1) Die Behauptung folgt bereits, wenn sie für alle stetigen und reellwertigen f und $z_0 := 1$ richtig ist.

(2) Sei $z_n := \rho_n e^{i\varphi_n} \in B_1$ eine Folge mit $\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = 1$. Es gilt

$$h(z_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i(s+\varphi_n)})}{1 - \rho_n e^{-is}} ds.$$

(3) Zeigen Sie, dass $g_n(s) := \mathrm{Re}\frac{1}{1-\rho_n e^{-is}}$ auf $(0, 2\pi)$ lokal gleichmäßig gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert.

(4) Zeigen Sie

$$\int_0^{2\pi} g_n(s)ds = 2\pi$$

für alle n.

(5) Folgern Sie nun die behauptete Gleichung für alle stetigen und reellwertigen f und $z_0 := 1$.

Aufgabe 9-3 (3 Punkte) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{B}_1 \subset G$ (, wobei $\overline{B}_1$ der abgeschlossene Einheitskreis ist) und $f \in \mathscr{O}(G)$. Zeigen Sie: Ist $f(\partial B_1) \subset \mathbb{R}$, so ist f konstant. *(Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 9-2.)*

Aufgabe 9-4 (3 Punkte) Zeigen Sie: Ist $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und f auf $\{z \in G | \ f(z) \neq 0\}$ holomorph, so ist f holomorph.