Vertiefung zu Komplexe Mannigfaltigkeiten

Blatt *Hirzebruchflächen*

Abgabe:

Aufgabe 1 Gegeben seien zwei komplexe Mannigfaltigkeiten X durch die Verklebedaten $U_i, V_{ij} \subset U_i$ offen und biholomorphe Abbildungen $\psi_{ij} : V_{ji} \longrightarrow V_{ij}$ sowie Y gegeben durch $\tilde{U}_i, \tilde{V}_{ij} \subset \tilde{U}_i$ und $\tilde{\psi}_{ij} : \tilde{V}_{ji} \longrightarrow \tilde{V}_{ij}$ mit gleicher Indexmenge $i, j \in I$ (was durch Redundanz stets erreicht werden kann). Zeigen Sie, dass durch eine Kollektion von stetigen/differenzierbaren/holomorphen Abbildungen $f_i : U_i \longrightarrow \tilde{U}_i$ mit $f_i(V_{ij}) \subset \tilde{V}_{ij}$ und

$$f_i \circ \psi_{ij} = \tilde{\psi}_{ij} \circ f_j$$

als Abbildungen von V_{ji} nach $\tilde{V}_{ij}$, eine stetige/differenzierbare/holomorphe Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ gegeben ist. (Umgekehrt kann die lokale Situation etwas komplizierter sein.)

Aufgabe 2 Gegeben seien

$$U_0 := \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1 =: U_1.$$

Durch die Verklebedaten $U_{01} := \mathbb{C}^* \times \mathbb{P}^1 =: U_{10}$ und

$$\psi_{10} : \mathbb{C}^* \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{P}^1, (s, [w_0 : w_1]) \mapsto (\frac{1}{s}, [s^n w_0 : w_1])$$

wird für alle $n \in \mathbb{N}_0$ eine komplexe Mannigfaltigkeit Σ_n, die sogenannte n-te Hirzebruchfläche, definiert.

(1) Zeigen Sie, dass durch

$$f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}, (s, [w_0 : w_1]) \mapsto s$$

für $i = 0, 1$ eine holomorphe Abbildung $f : \Sigma_n \longrightarrow \mathbb{P}^1$ definiert wird, deren Fasern $f^{-1}(s)$ alle biholomorph zu $\mathbb{P}^1$ sind. (Man sagt, f ist ein $\mathbb{P}^1$-Bündel über $\mathbb{P}^1$.)

(2) Beweisen Sie $\Sigma_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und $\Sigma_1 = Bl_{[1:0:0]}\mathbb{P}^2$.

(3) Man kann zeigen (evtl. in einer späteren Übung), dass alle Σ_n paarweise nicht-isomorphe komplexe Mannigfaltigkeiten sind. Jedoch sind alle Σ_{2n} *diffeomorph* zu $S^2 \times S^2$. Einen solchen Diffeomorphismus werden wir nun konstruieren.

Dazu definieren wir die C^∞-Funktionen

$$\mu_k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \mu_k(s) := s^k e^{-\frac{1}{|s|^2}} + e^{-|s|^2}$$

sowie

$$\lambda_k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \lambda_k(s) := s^k e^{-\frac{1}{|s|^2}} - e^{-|s|^2}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$f_0: \quad U_0 \longrightarrow U_0, \quad (s, [w_0 : w_1]) \mapsto (s, [\lambda_{-n}(s)w_0 - \mu_{-n}(s)w_1 : \mu_n(s)w_0 + \lambda_n(s)w_1])$$

$$f_1: \quad U_1 \longrightarrow U_1, \quad (s, [w_0 : w_1]) \mapsto (s, [\lambda_{-n}(s)w_0 + \mu_{-n}(s)w_1 : -\mu_n(s)w_0 + \lambda_n(s)w_1])$$

wohldefiniert sind und die Verklebedaten eines Diffeomorphismus

$$f: \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_{2n}$$

sind.

Es gibt also auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit $S^2 \times S^2$ unendlich viele paarweise nicht-isomorphe komplexe Strukturen, obwohl es auf S^2 genau eine komplexe Struktur gibt, die von $\mathbb{P}^1$. Ein durchaus bemerkenswertes Resultat.