Vertiefung zu Komplexe Mannigfaltigkeiten

Blatt *Picardgruppe des komplex-projektiven Raumes*

Aufgabe 1 Wir wollen

$$\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}$$

zeigen. Zeigen Sie dazu:

(1) Ist $f \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^*)$, so existieren $\kappa \in \mathbb{Z}$ und $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^*)$ so, dass $f = z_n^\kappa \cdot \exp(g)$.
Benutzen Sie wieder, dass $\log f$ *auf einfach zusammenhängenden Gebieten wohldefiniert ist.*

(2) Zeigen Sie, dass κ eindeutig definiert ist.

(3) Folgern Sie, dass die Übergangsfunktionen $\psi_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ eines Geradenbündels auf $\mathbb{P}^n$ eine Darstellung

$$\psi_{ij} = \left(\frac{z_j}{z_i}\right)^{\kappa_{ij}} \cdot \exp(\eta_{ij})$$

mit $\kappa_{ij} \in \mathbb{Z}, \eta_{ij} \in \mathcal{O}(U_{ij})$ besitzen.

(4) Benutzen Sie die Kozykelbedingung, um zu zeigen, dass κ_{ij} unabhängig von i, j ist. Wir schreiben dann $\kappa := \kappa_{ij}$.

(5) Nutzen Sie erneut die Laurentreihe von η_{ij}, um $\theta_i^{(ij)} \in \mathcal{O}^*(U_i)$ so zu finden, dass

$$\theta_i^{(ij)} \psi_{ij} (\theta_j^{(ij)})^{-1} = \left(\frac{z_j}{z_i}\right)^\kappa \tag{0.1}$$

gilt. Nun müssen wir noch die (ij)-Abhängigkeit der $\theta_i^{(ij)}$ und $\theta_j^{(ij)}$ loswerden.

(6) Zeigen Sie, dass für jede weitere Lösung $\tilde{\theta}_i^{(ij)}$ und $\tilde{\theta}_j^{(ij)}$ von (0.1) Konstanten $c^{(ij)}$ so existieren, dass gilt

$$\tilde{\theta}_i^{(ij)} = c^{(ij)} \theta_i^{(ij)}, \ \tilde{\theta}_j^{(ij)} = c^{(ij)} \theta_j^{(ij)}$$

(und umgekehrt diese Gleichungen wieder Lösungen definieren).
Benutzen Sie dazu den 2. Riemannschen Hebbarkeitssatz.

(7) Zeigen sie mit Hilfe des 2. Riemannschen Hebbarkeitssatzes und der Kozykelbedingung, dass

$$\frac{\theta_i^{(ij)}}{\theta_i^{(ik)}} = c_{i|jk} \in \mathbb{C}^*$$

konstant ist und es gilt

$$c_{i|jl} = c_{i|jk} c_{i|kl}.$$

Dies ist eine Kozykelbedingung für jedes feste i (auf dem topologischen Raum eines Punktes mit $(n+1)$*-mal dem Punkt als offene Überdeckung).* Unter Multiplikation mit $c^{(ij)}$ wie oben transformieren sich die $c_{i|jk}$ folgendermassen

$$\tilde{c}_{i|jk} = \frac{c^{(ij)}}{c^{(ik)}} c_{i|jk}.$$

(8) Zeigen Sie, dass $c^{(ij)}$ existieren so, dass $\tilde{c}_{i|jk} = 1$ gilt.

Damit ist nun $\tilde{\theta}_i := \tilde{\theta}_i^{(ij)} \in \mathcal{O}^*(U_i)$ unabhängig von j definiert. Es ist aber noch nicht erreicht, dass auch $\tilde{\theta}_i = \tilde{\theta}_i^{(ji)}$ gilt. Um das zu erreichen, nutzen wir nun die restlichen Freiheitsgrade bei der Wahl der $c^{(ij)}$: Beachten Sie, dass $\lambda_i c^{(ij)}$ ebenso zu einem wohldefinierten $\tilde{\theta}_i$ führt.

(9) Zeigen Sie, dass auch $\check{\theta}_i^{(ij)} := \tilde{\theta}_i^{(ji)}, \check{\theta}_j^{(ij)} := \tilde{\theta}_j^{(ji)}$ eine Lösung von (0.1) ist und daher Konstanten $d^{(ij)}$ existieren so, dass

$$\frac{\tilde{\theta}_i^{(ji)}}{\tilde{\theta}_i^{(ij)}} = \frac{\tilde{\theta}_j^{(ji)}}{\tilde{\theta}_j^{(ij)}} = d^{(ij)}$$

gilt. Beweisen Sie mit Hilfe von Gleichung (0.1), Aussage 8 und der Kozykelbedingung an die ψ_{ij}, dass auch die $d^{(ij)}$ einen Kozykel (auf einem Punkt wie oben) bilden, d.h.

$$d^{(ij)} d^{(jk)} = d^{(ik)}.$$

(10) Zeigen Sie nun, dass es $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$ gibt mit

$$d^{(ij)} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}.$$

Wie bereits angekündigt, betrachten wir nun das $\tilde{\theta}^{(ij)}$, das wir durch Multiplikation mit $\lambda_i c^{(ij)}$ anstatt mit $c^{(ij)}$ erhalten und bekommen zusätzlich zu $\tilde{\theta}_i^{(ij)} = \tilde{\theta}_i^{(ik)}$ die Eigenschaft

$$\tilde{\theta}^{(ij)})_i = \tilde{\theta}_i^{(ji)}.$$

Beides zusammengenommen bedeutet, dass

$$\tilde{\theta}_i := \tilde{\theta}_i^{(ij)} = \tilde{\theta}_i^{(ji)}$$

völlig unabhängig von der Wahl der oberen Indizes ist und daher die vereinfachte Gleichung (0.1)

$$\tilde{\theta}_i \psi_{ij} \tilde{\theta}_j^{-1} = \left(\frac{z_j}{z_i} \right)^{\kappa}$$

erfüllt, was bedeutet, dass jedes Geradenbündel Trivialisierungen hat, deren Übergangsfunktionen $\tilde{\psi}_{ij}$ durch

$$\tilde{\psi}_{ij}(z) = \left(\frac{z_j}{z_i} \right)^{\kappa}$$

für $\kappa \in \mathbb{Z}$ gegeben sind. Dies beweist die Aussage. Das so gegebene Geradenbündel wird wieder mit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\kappa)$ bezeichnet.