PD Dr. Marco Kühnel Sommer 2011

Vertiefung zu Komplexe Mannigfaltigkeiten

Blatt *Eulersequenz*

Aufgabe 1 Seien $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ holomorphe Vektorbündel auf der komplexen Mannigfaltigkeit X. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ die Vektorbündelhomomorphismen zwischen $\mathscr{E}$ und $\mathscr{F}$ sowie mit $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}(\mathscr{E}), \mathscr{O}(\mathscr{F}))$ die $\mathscr{O}_X$-Modulhomomorphismen[1] zwischen den jeweiligen $\mathscr{O}_X$-Moduln. Beides sind $\mathscr{O}_X(X)$-Moduln. Ein Element $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ induziert ein $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}(\mathscr{E}), \mathscr{O}(\mathscr{F}))$ via

$$\psi(s)(x) := \varphi(s(x)).$$

Zeigen Sie, dass dadurch ein Isomorphismus von $\mathscr{O}_X(X)$-Moduln

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}(\mathscr{E}), \mathscr{O}(\mathscr{F}))$$

gegeben ist.

Aufgabe 2 Sei $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ die Standardprojektion. Zeigen Sie, dass für jedes offene $U \subset \mathbb{P}^n$ mit $[z] \in U$ und $h \in \mathscr{O}(\pi^{-1}(U))$ homogen vom Grad 1

$$h\frac{\partial}{\partial z_i} : \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n,[z]} \longrightarrow \mathbb{C}, h\frac{\partial}{\partial z_i} f := h \left.\frac{\partial}{\partial z_i}\right|_z (f \circ \pi)$$

eine Derivation wohldefiniert. Zeigen Sie, dass die folgende Sequenz von Vektorbündelhomomorphismen ("Eulersequenz")

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} & \longrightarrow & \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus n+1} & \longrightarrow & T_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0 \\ f & \mapsto & (z_i f)_i, (f_i)_i & \mapsto & \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial z_i} \end{array}$$

exakt ist. (Hierbei wird die Sequenz als Sequenz zwischen $\mathscr{O}_X$-Moduln verstanden und die Charakterisierung von Schnitten von $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)(U)$ als holomorphe Funktionen auf $\pi^{-1}(U)$, die homogen vom Grad 1 sind, verwendet.)

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass das äußere Differential $d : \mathscr{O}_X \longrightarrow \Omega^1_X$ ein Garbenmorphismus (zwischen Garben von $\mathbb{C}$-Vektorräumen), aber kein Vektorbündelhomomorphismus ist.

[1] Garbenmorphismen, die zusätzlich $\varphi(fs) = f\varphi(s)$ für alle $f \in \mathscr{O}_X, s \in \mathscr{O}(\mathscr{E})$ erfüllen