Vertiefung zu Komplexe Mannigfaltigkeiten

Blatt *Divisoren*

Aufgabe 1 Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1$. Sei $X = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\langle\mu\rangle$ die Hopffläche, die durch $\mu \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ definiert durch $\mu(x,y) := (\lambda_1 x, \lambda_2 y)$ gegeben ist.

(1) Zeigen Sie: Ist für alle $a, b \in \mathbb{Z}$
$$\lambda_1^a \neq \lambda_2^b,$$
so enthält X nur zwei irreduzible Kurven (:= analytische Mengen der Kodimension 1).

Hinweis: Offenbar enthält X die Kurven $\{x = 0\}$ und $\{y = 0\}$. Es gilt wieder $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{C}^*$. Benutzen Sie dies, um wie in der Vorlesung die Schnitte von Geradenbündeln auf X zu berechnen und zeigen Sie, dass diese als Nullstellendivisor nur Summen von Vielfachen der beiden angegebenen Kurven haben können.

(2) Zeigen Sie: Existieren a, b in $\mathbb{Z}$ so, dass $\lambda_1^a = \lambda_2^b$, so existiert eine holomorphe, surjektive Abbildung $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$, deren Fasern disjunkte Vereinigungen elliptischer Kurven sind; insbesondere existieren dann unendlich viele Kurven auf X.

(3) Berechnen Sie K_X.

Aufgabe 2 Sei Σ_n eine Hirzebruchfläche wie im ersten Blatt. Die Abbildungen $\sigma_1 : \mathbb{C} \longrightarrow U_0, s \mapsto (s, [1:0])$ und $\sigma_2 : \mathbb{C} \longrightarrow U_0, s \mapsto (s, [0:1])$ lassen sich zu Schnitten $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \Sigma_n$ von f fortsetzen (d.h. $\sigma_i \circ f = \mathrm{id}$). Sei $C_i := \sigma_i(\mathbb{P}^1)$. Es bezeichne $\sim$ die lineare Äquivalenz von Divisoren, also die Äquivalenzrelation, die die Divisorenklassengruppe definiert.

(1) Berechnen Sie
$$N_{C_1|\Sigma_n} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(n),\ N_{C_2|\Sigma_n} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-n).$$

(2) Zeigen Sie, dass alle Fasern F von f linear äquivalente Divisoren sind.

(3) Zeigen Sie, dass $C_1 \sim C_2 + nF$.

(4) Zeigen Sie, dass $C_1 + F$ sehr ample ist; genauer definieren
$$\iota_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{P}^3, (s, [w_0 : w_1]) \mapsto [w_0 s^{n+1} : w_1 s : w_0 : w_1],$$
$$\iota_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{P}^3, (s, [w_0 : w_1]) \mapsto [w_0 : w_1 : w_0 s^{n+1} : w_1 s]$$
eine Einbettung $\iota : \Sigma_n \longrightarrow \mathbb{P}^3$.

bitte wenden

Aufgabe 3 Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Submersion mit zusammenhängenden Fasern. Zeigen Sie für die Fasern $F := f^{-1}(x)$, dass $N_{F|X} = \mathcal{O}_F^{\oplus \dim X - \dim Y}$.

Aufgabe 4 Sei $D = \{F = 0\} \subset \mathbb{P}^n$ für ein homogenes Polynom F vom Grad d. Zeigen Sie: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$.

Aufgabe 5 Sei D in X eine glatte Hyperfläche (:=Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1). Zeigen Sie: $N_{D|X} = \mathcal{O}_X(D)|_D$.