Albert-Ludwigs-Universität Freiburg 19.04.2010
Mathematisches Institut
Prof. Dr. G. Wang / PD Dr. M. Kühnel

Einführung in Partielle Differentialgleichungen (Sommer 2010)
Übungsblatt 1 (Abgabe: 26.04.2010 vor der Vorlesung)

1. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass der Ball $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ C^1-Rand hat.

2. (5 Punkte) Sei
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (xy, y - \frac{y^2}{2} + \sin x).$$
Weiter seien die Kurven $\Gamma_1 := \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}$ und $\Gamma_2 := \{(x, y)| \max(|x|, |y|) = 1\}$ gegeben. Berechnen Sie $\int_{\Gamma_i} f \cdot \nu_i(x) dS(x)$ für $i = 1, 2$. (Dabei ist ν_i die äußere Normale des von Γ_i berandeten beschränkten Gebietes.)

3. (4 Punkte)

   1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ein divergenzfreies C^1-Vektorfeld mit möglicher Singularität in 0. Seien weiter $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ Umgebungen mit C^1-Rand, die die 0 enthalten. Dann gilt
   $$\int_{\partial\Omega} f \cdot \nu \, dS = \int_{\partial\tilde{\Omega}} f \cdot \nu \, dS.$$
   2. Zeigen Sie, dass $f(x, y) := (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ divergenzfrei ist und berechnen Sie das angegebene Integral für eine beliebige Umgebung Ω von 0 mit C^1-Rand.

4. (4 Punkte)[1] Sei $G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \; x, y, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie das Volumenintegral
$$\int_G xy + yz + zx \, dV.$$

[1] 3 Punkte, wenn Sie das Integral direkt ausrechnen; 4 Punkte, wenn Sie den Gaußschen Integralsatz essentiell benutzen; 5 Punkte, wenn Sie beides tun.