

Einführung in Partielle Differentialgleichungen (Sommer 2010)
Übungsblatt 2 (Abgabe: 3.5.2010 vor der Vorlesung)

1. (3 Punkte) Sei $n \geq 3$ und $u_n : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|^{2-n}$. Weiter sei $u_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log|x|$. Zeigen Sie, dass $\Delta u_n = 0$ für alle $n \geq 2$.

2. (4 Punkte) Sei $Q := \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq \pi, |y| \leq \pi\}$. Berechnen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } Q \\ u = \operatorname{sgn}(x) & \text{auf } |x| = \pi \\ u = \sin 5x + \frac{x}{\pi} & \text{auf } |y| = \pi, \end{cases} \quad (1)$$

indem Sie mit einem Separationsansatz $u(x, y) = v(x)w(y)$ starten.

Hinweis: Die Randwerte müssen erst von Summen solcher Funktionen erfüllt werden!

3. (3 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit C^1 -Rand und $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ erfülle

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie: $u \equiv 0$ in Ω .

Hinweis: Berechnen Sie $\operatorname{div}(v\nabla v)$ (für beliebiges v) und benutzen Sie das Ergebnis, um $u\Delta u$ zu integrieren.