

Einführung in Partielle Differentialgleichungen (Sommer 2010)
Übungsblatt 3 (Abgabe: 10.5.2010 vor der Vorlesung)

1. (4 Punkte)

1. Sei $R > 0$, $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ die Kugel um 0 vom Radius R und $f \in C^0(\overline{B_R(0)}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie

$$\int_{B_R(0)} f(x) dx = \int_0^R \int_{\partial B_r(0)} f(x) dS(x) dr = \int_0^R \int_{\partial B_1(0)} f(r\omega) dS(\omega) r^{n-1} dr.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Transformation $\Phi : B'_1(0) \times (0, R) \longrightarrow B_R(0) \cap H^+$, $(\xi, r) \mapsto (r\xi, r\sqrt{1-|\xi|^2})$; hierbei ist $B'_1(0) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ die $(n-1)$ -dimensionale Einheitskugel und $H^+ := \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$.

2. Sei $0 < r < R$. Berechnen Sie in $\mathbb{R}^3$ das Integral

$$\int_{B_R(0) \setminus B_r(0)} \frac{|xyz|}{x^2 + y^2 + z^2} dV.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Parametrisierung $(\phi, \psi) \mapsto (\sin \phi \cos \psi, \cos \phi \cos \psi, \sin \psi)$ der Einheitssphäre in einem geeigneten Parameterbereich.

2. (4 Punkte) Berechnen Sie die Oberfläche des Torus $T \subset \mathbb{R}^3$ mit den Radien R und $r < R$, der durch folgende Parametrisierung gegeben ist:

$$\Psi : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \longrightarrow T \subset \mathbb{R}^3, (\varphi, \theta) \mapsto ((R + r \cos \theta) \cos \varphi, (R + r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta).$$

Hinweis: Die Oberfläche ist durch das Oberflächenintegral $\int_T dS$ gegeben.

3. (4 Punkte) Sei $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ radialsymmetrisch, integrierbar und erfülle $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$. Zeigen Sie, dass für jede harmonische Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$u(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R(x)} u(y) f(x-y) dy.$$

4. (3 Punkte) Sei $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$. Weiter sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine harmonische Funktion mit den Randwerten $u|_{\partial\Omega} = 1 + 3y^2$. Geben Sie, ohne u explizit zu berechnen, den maximalen Wert von u in $\overline{\Omega}$ und den Funktionswert $u(0)$ an.

5. (4 Punkte) Sei $\Omega := (0, \pi) \subset \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} &= 0 \text{ in } \Omega \times (0, \infty) \\u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \times (0, \infty) \\u(., 0) &= u_0 \text{ in } \Omega\end{aligned}$$

für $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$.

1. Finden Sie Lösungen, indem Sie mit einem Separationsansatz $u(x, t) = v(x)w(t)$ starten. Bilden Sie die formale Reihe der dadurch gewonnen Lösungen und drücken Sie die Koeffizienten durch u_0 aus.
2. Berechnen Sie die Reihe für $u_0 := \chi_{[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]}$.