Albert-Ludwigs-Universität Freiburg 10.5.2010
Mathematisches Institut
Prof. Dr. G. Wang / PD Dr. M. Kühnel

Einführung in Partielle Differentialgleichungen (Sommer 2010)
Übungsblatt 4 (Abgabe: 17.5.2010 vor der Vorlesung)

1. (3 Punkte) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie: die Niveaumengen

$$N_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n |\ u(x) = \alpha\}$$

sind für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ entweder leer oder unbeschränkt.

Hinweis: Mittelwerteigenschaft auf beliebigen Sphären!

2. (3 Punkte)

   1. Sei $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass für

   $$v : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}, v(r, \varphi) := u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

   gilt:

   $$(\Delta u)(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}(r, \varphi).$$

   2. Sei $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und radialsymmetrisch, d.h. $u(x) = v(|x|)$ für eine Funktion $v : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie $v \in C^2([0, \infty))$ und

   $$(\Delta u)(x) = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) (|x|).$$

3. (Präsenzaufgabe) Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : V \longrightarrow U$ ein C^2-Diffeomorphismus, d.h. Φ ist bijektiv, zweimal stetig differenzierbar und ebenso ist dies Φ^{-1}. Der Maßtensor G sei definiert als

$$G := D\Phi^T \cdot D\Phi$$

und die Matrixeinträge von G seien g_{ij} benannt. Die Einträge von G^{-1} hingegen werden mit g^{ij} notiert.

   1. Zeigen Sie,

   $$\langle \nabla u(\Phi(x)), \nabla v(\Phi(x)) \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial (u \circ \Phi)}{\partial x^i}(x) \frac{\partial (v \circ \Phi)}{\partial x^j}(x)$$

   für alle $u, v \in C^1(U), x \in V$.

2. Sei $g := \det G$. Zeigen Sie $|\det D\Phi| = \sqrt{g}$ in V und beweisen Sie damit

$$\int_U \Delta u \cdot v dz = \int_V \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial(u \circ \Phi)}{\partial x^i}\right) \cdot v \circ \Phi dx$$

für alle $u \in C^2(U), v \in C_0^1(U)$. Schließen Sie daraus

$$\Delta u(\Phi(x)) = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g}(x) g^{ij}(x) \frac{\partial(u \circ \Phi)}{\partial x^i}(x)\right)$$

für alle $x \in V$.

4. (3 Punkte) Sei $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine Abbildung $\Phi \in C^1(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ heißt *konform*, wenn es zu jedem $x \in \tilde{\Omega}$ ein $\lambda(x) \in \mathbb{R}^+$ und eine orthogonale Matrix $A(x) \in O(n)$ gibt, so dass

$$D\Phi(x) = \lambda(x) A(x).$$

   1. Zeigen Sie: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein weiteres Gebiet und $\Phi : \tilde{\Omega} \longrightarrow \Omega$ zweimal stetig differenzierbar, bijektiv und konform, so gilt

   $$\lambda^n (\Delta u) \circ \Phi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\lambda^{n-2} \frac{\partial(u \circ \Phi)}{\partial x^i}\right)$$

   für alle $u \in C^2(\Omega)$.

   Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3.

   2. Zeigen Sie: Ist Φ konform, so gilt

   $$\lambda(x) = |\det D\Phi(x)|^{\frac{1}{n}}.$$

   (Hierbei ist $\|.\|$ die euklidische Norm.)

5. (4 Punkte) Wir betrachten die Inversion

$$\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, z \mapsto \frac{z}{|z|^2}.$$

Mit e_n sei der n-te Standardeinheitsvektor bezeichnet.

   1. Zeigen Sie: Φ ist konform.
   2. Zeigen Sie: Die punktierte Sphäre $\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} |\ |x - re_n| = r\}$ wird durch Φ auf die Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1} \times \{\frac{1}{2r}\}$ abgebildet.
   3. Zeigen Sie: Φ bildet die Kugel $B_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}e_n) := \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} |\ |x - \frac{1}{2}e_n| < \frac{1}{2}\}$ auf den Halbraum $\{x \in \mathbb{R}^n |\ x_n > 1\}$ ab.
   4. Schreiben Sie $(\Delta u) \circ \Phi$ in Termen von Ableitungen von $u \circ \Phi$.