Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. G. Wang / PD Dr. M. Kühnel

17.5.2010

Einführung in Partielle Differentialgleichungen (Sommer 2010)
Übungsblatt 5 (Abgabe: 24.5.2010 vor der Vorlesung)

1. (5 Punkte) Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ der Einheitsball. Verifizieren Sie durch direkte Rechnung, dass für alle $x \in B$ die Identität

$$\frac{1}{ne_n} \int_{\partial B} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n} dS(y) = 1$$

gilt.

2. (3 Punkte) Berechnen Sie den Poissonkern für $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, d.h. $K(x,y)$ so, dass für gegebenes $R > 0$ und $\varphi \in C^0(\partial B_R(0))$ die Funktion

$$u(x) := \begin{cases} \varphi(x) & \text{, falls } x \in \partial B_R(0) \\ \int_{\partial B_R(0)} K(x,y)\varphi(y)dS(y) & \text{, falls } x \in B_R(0) \end{cases}$$

in $C^\infty(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$ liegt und die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \ \forall \ x \in B_R(0) \\ u(x) &= \varphi(x) \ \forall \ x \in \partial B_R(0) \end{aligned}$$

löst.

Hinweis: Skalieren Sie das Problem auf $B_1(0)$ und verwenden Sie die bekannte Lösung.

3. (3 Punkte) Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ die Einheitskreisscheibe und $u \in C^\infty(B) \cap C^0(\overline{B})$ die Lösung des Dirichletproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= 0 \ \forall \ x \in B \\ u(x,y) &= \left(\frac{5}{4} - x\right)^2 \ \forall \ x \in \partial B. \end{aligned}$$

Berechnen Sie $u(0,0)$ und $u(\frac{1}{2},0)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung mit Hilfe des Poissonkerns, um $u(\frac{1}{2},0)$ zu berechnen.

4. (2 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^3(\Omega)$. Zeigen Sie: Ist u harmonisch, so ist $|\nabla u|^2$ subharmonisch.