Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. G. Wang / PD Dr. M. Kühnel

31.5.2010

Einführung in Partielle Differentialgleichungen (Sommer 2010)
Übungsblatt 6 (Abgabe: 7.6.2010 vor der Vorlesung)

1. (3 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f, g \in C^0(\Omega)$ subharmonisch. Zeigen Sie, dass auch $f + g$ subharmonisch ist.

2. (3 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, das spiegelsymmetrisch bezüglich der Ebene $E := \{x_n = 0\}$ ist, d.h.
$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \Omega \iff (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) \in \Omega.$$
Weiter bezeichne $\Omega^+ := \Omega \cap \{x_n > 0\}$.
Zeigen Sie: Ist $u \in C^2(\Omega^+) \cap C^0(\overline{\Omega^+})$ harmonisch und $u|_E \equiv 0$, so ist $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$,
$$v(x) := \begin{cases} u(x) & \text{, falls } x_n \geq 0 \\ -u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) & \text{, falls } x_n < 0 \end{cases}$$
in $C^2(\Omega)$ und harmonisch.

3. (3 Punkte) Sei $B_1^+ := \{x \in \mathbb{R}^n |\ |x| < 1, x_n > 0\}$. Lösen Sie explizit das Dirichletproblem
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ in } B_1^+ \\ u &= x_n^3 \text{ auf } \partial B_1^+ \end{aligned}$$
Hinweis: Spielen Sie mit Polynomen dritten Grades herum.

4. (3+2 Punkte)
   1. Sei $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$ harmonisch und nicht-negativ. Leiten Sie aus der Poisson-Formel folgende Version einer Harnackungleichung her:
   $$\frac{R^{n-2}(R - |x|)}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R + |x|)}{(R - |x|)^{n-1}} u(0)$$
   für alle $x \in B_R(0)$.
   2. Leiten Sie daraus den Satz von Liouville ab: Eine nach unten (oder oben) beschränkte harmonische Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ist konstant.

5. (3 Punkte) Gegeben Sei ein reguläres Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $u|_{\partial\Omega} = 0$. Zeigen Sie: Für alle $\varepsilon > 0$ gilt
$$\int_\Omega |Du|^2 dx \leq \varepsilon \int_\Omega (\Delta u)^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega u^2 dx.$$
Hinweis: Lassen Sie sich vom Beweis der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung 0.11 inspirieren.