Albert-Ludwigs-Universität Freiburg 7.6.2010
Mathematisches Institut
Prof. Dr. G. Wang / PD Dr. M. Kühnel

Einführung in Partielle Differentialgleichungen (Sommer 2010)
Übungsblatt 7 (Abgabe: 14.6.2010 vor der Vorlesung)

1. (2 Punkte) Sei $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{sign}(x)$. Zeigen Sie $u \notin W^1(\mathbb{R})$.

2. (3 Punkte) Für den Moment sei für einen Multiindex $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$
$$W^\gamma(\Omega) := \{f \in L^1_{loc}(\Omega) |\, D^\gamma f \text{ existiert in } L^1_{loc}(\Omega)\}.$$
Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in W^\alpha(\Omega) \cap W^\beta(\Omega)$. Zeigen Sie:
$$u \in W^{\alpha+\beta}(\Omega) \iff D^\beta u \in W^\alpha(\Omega) \iff D^\alpha u \in W^\beta(\Omega)$$
und gegebenenfalls gilt
$$D^{\alpha+\beta}u = D^\alpha(D^\beta u) = D^\beta(D^\alpha u)$$
fast überall.

3. (3 Punkte) Gegeben seien $I := (a, b)$ und $u \in W^{1,2}(I) \cap C^0([a, b])$. Zeigen Sie
$$[u]_{C^{\frac{1}{2}}([a,b])} \leq \|u'\|_{L^2(I)},$$
wobei $[u]_{C^{\frac{1}{2}}([a,b])} := \sup_{x,y\in[a,b],x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{1}{2}}}$. Schließen Sie daraus, dass $W^{1,2}(I)$ stetig in $C^{\frac{1}{2}}([a, b])$ eingebettet ist.
Hinweis: Beweisen Sie die Ungleichung zunächst für klassisch differenzierbare Funktionen, wenden dort den HDI und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung an und verwenden Sie dann ein Dichtheitsargument.

4. (3 Punkte) Sei $1 \leq p < \infty$. Bestimmen Sie alle $\alpha > 0$, so dass
$$u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, u(x) := \frac{1}{1 + |x|^\alpha}$$
zu $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ gehört. Geben Sie für diese Fälle die schwache Ableitung an.