Albert-Ludwigs-Universität Freiburg 14.6.2010
Mathematisches Institut
Prof. Dr. G. Wang / PD Dr. M. Kühnel

Einführung in Partielle Differentialgleichungen (Sommer 2010)
Übungsblatt 8 (Abgabe: 21.6.2010 vor der Vorlesung)

1. (3 Punkte) Gegeben seien ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f \in L^2(\Omega)$. Eine Funktion $u \in H_0^2(\Omega)$ heißt schwache Lösung des Problems

$$\Delta^2 u = f \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega,\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

wenn für alle $\psi \in H_0^2(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \Delta u \Delta \psi dx = \int_\Omega f \psi dx.$$

Zeigen Sie: Zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ existiert genau eine schwache Lösung $u \in H_0^2(\Omega)$.

2. (4 Punkte) Sei $V := H_0^1((0,1))$ und

$$a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, a(u,v) := \int_0^1 (1+x)u'v'dx$$

sowie

$$F : V \longrightarrow \mathbb{R}, F(v) := -\int_0^{\frac{1}{2}} (1+4x)vdx.$$

Zeigen Sie:

1. Es gibt genau ein $u \in V$, so dass

$$a(u,v) = F(v)\ \forall\ v \in V.$$

2. Dieses u wird gegeben durch

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\ln 2}\ln(1+x) + x^2 - x & \text{, falls } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4\ln 2}\ln(1+x) - \frac{1}{4} & \text{, falls } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}.$$

3. (2 Punkte) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in L^2(\Omega)$ sowie $u \in H_0^1(\Omega)$ die schwache Lösung des Problems

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Zeigen Sie $u \in H^2(\Omega)$.

bitte wenden

4. (3 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. $u \in H_0^1(\Omega)$ heißt schwache Oberlösung für

$$-\Delta u \geq 0 \text{ in } \Omega, u = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

wenn für alle *nichtnegativen* $\psi \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle dx \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass für solche schwache Oberlösungen stets

$$u \geq 0$$

fast überall gilt.

Hinweis: Benutzen Sie u, um eine geschickte Testfunktion ψ zu konstruieren.