

Einführung in Partielle Differentialgleichungen (Sommer 2010)
Übungsblatt 9 (Abgabe: 28.6.2010 vor der Vorlesung)

1. (3 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\gamma : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

die Wärmeleitungsgleichung

$$\gamma_t - \Delta \gamma = 0$$

löst. γ heißt *Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung*.

2. (4 Punkte) Sei $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0.$$

Zeigen Sie, dass (für $\lambda \in \mathbb{R}$) auch

$$u_t, \quad u_{x_i}, \quad v_\lambda(t, x) := u(\lambda^2 t, \lambda x) \quad \text{und} \quad w(t, x) := \langle x, \nabla u(t, x) \rangle + 2tu_t(t, x)$$

Lösungen der Wärmeleitungsgleichung sind. (Hierbei ist ∇ der Gradient bezüglich der x -Koordinaten.)

3. (4 Punkte) Sei $v : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar.

1. Zeigen Sie, dass

$$u : (0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, u(t, x) := v\left(\frac{x^2}{t}\right)$$

genau dann eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist, wenn

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0 \tag{1}$$

für alle $z \geq 0$ gilt.

2. Zeigen Sie, dass die Lösungen von (1) von der Form

$$v(z) = c_1 \int_0^z e^{-\frac{s}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds + c_2$$

für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sind.

3. Bestimmen Sie c_1 so, dass $u_x(t, x)$ für $x > 0$ die eindimensionale Fundamentallösung ist.

bitte wenden

4. (3 Punkte) Sei $\varphi \in C^0([0, \pi])$ mit $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Zeigen Sie, dass es genau ein $u \in C^\infty((0, \infty) \times [0, \pi]) \cap C^0([0, \infty) \times [0, \pi])$ gibt so, dass

$$\begin{aligned}u_t - \Delta u &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times [0, \pi] \\u(0, x) &= \varphi(x) \text{ für } x \in [0, \pi] \\u(t, 0) = u(t, \pi) &= 0 \text{ für } t \in [0, \infty).\end{aligned}$$

Hinweis: Setzen Sie φ ungerade und 2π -periodisch als stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ fort und benutzen Sie Satz 7.2. aus der Vorlesung, um Existenz und Eindeutigkeit für das modifizierte Problem zu zeigen. Verwenden Sie die dort angegebene Darstellungsformel, um $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ zu beweisen.