Albert-Ludwigs-Universität Freiburg 28.6.2010
Mathematisches Institut
Prof. Dr. G. Wang / PD Dr. M. Kühnel

Einführung in Partielle Differentialgleichungen (Sommer 2010)
Übungsblatt 10 (Abgabe: 5.7.2010 vor der Vorlesung)

1. (3 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten
$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|z|^2} dz$$
und benutzen Sie dies, um auch
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$$
zu berechnen.

2. (4 Punkte) Gegeben sei ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand, $\Omega_T := \Omega \times (0, T]$ und eine Lösung $u \in C^{2,2}(\overline{\Omega}_T)$ von
$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega_T \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \times (0, T] \\ u(., 0) &= u_0 \text{ auf } \overline{\Omega} \end{aligned}$$
für ein $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$. Wir definieren die thermische Energie zur Zeit t als
$$E(t) := \|u(., t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$
Zeigen Sie, dass für alle $0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq T$ gilt:
$$E(t) \leq E(t_1)^{\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}} E(t_2)^{\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}}.$$
Hinweis: Berechnen Sie E' und E'' und zeigen Sie $E'' = 4 \int_\Omega (u_t)^2 dx$; folgern Sie mit der Hölderschen Ungleichung
$$(E')^2 \leq EE''$$
und beweisen Sie damit die Konvexität der Funktion $\log E$.

3. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $u \in C^{1,2}([0, \infty) \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ und $p \in C^{0,1}([0, \infty) \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ sowie $v, \rho \in \mathbb{R}$. Physikalisch soll u die Geschwindigkeit einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit sein, p der hydrodynamische Druck, ρ die Dichte und v die Viskosität der Flüssigkeit. Nehmen wir an, die Flüssigkeit hafte am Rand des Gebiets, so ist folgendes Differentialgleichungssystem erfüllt:
$$\begin{aligned} u_t - v\Delta u + (\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i}) u + \frac{1}{\rho} \nabla p &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega \\ \text{div} u &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \partial\Omega. \end{aligned}$$

Beweisen Sie die Energiegleichung

$$\|u(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2v \int_0^t \|\nabla u(s,.)\|^2_{L^2(\Omega)} ds = \|u(0,.)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Dabei soll

$$\|\nabla u(s,.)\|^2_{L^2(\Omega)} := \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 dx$$

bedeuten.

4. (3 Punkte) Wir betrachten eine beschränkte Lösung $u \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ des Cauchyproblems

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \text{ in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,.) &= \varphi \text{ auf } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

für eine stetige, beschränkte Funktion $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie:

$$\sup_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^n} u = \sup_{\mathbb{R}^n} \varphi \text{ und } \inf_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^n} u = \inf_{\mathbb{R}^n} \varphi.$$

Hinweis: Verwenden Sie Satz 7.8 aus der Vorlesung.