Albert-Ludwigs-Universität Freiburg 5.7.2010
Mathematisches Institut
Prof. Dr. G. Wang / PD Dr. M. Kühnel

Einführung in Partielle Differentialgleichungen (Sommer 2010)
Übungsblatt 11 (Abgabe: 12.7.2010 vor der Vorlesung)

1. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0,\infty)) \cap C^0(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,t) &= g(x) \text{ auf } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(.,0) &= u_0 \end{aligned}$$

für $g \in C^0(\partial\Omega), u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$. Weiter sei $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ harmonisch und erfülle $v|_{\partial\Omega} = g$.

Wir wollen beweisen, dass

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} u(.,t) = v$$

in $C^0(\overline{\Omega})$, d.h. $\lim_{t\longrightarrow\infty} \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x,t) - v(x)| = 0$. Dazu lösen Sie folgende Aufgaben:

   1. Zeigen Sie, dass $w(x,t) := C \exp(-n\lambda^2 t) \prod_{i=1}^n \cos \lambda x_i$ die Wärmeleitungsgleichung $w_t - \Delta w = 0$ erfüllt.
   2. Zeigen Sie, dass man C und λ so wählen kann, dass $|u(x,t) - v(x)| \leq w(x,t)$ für alle $x \in \overline{\Omega}, t \in [0,\infty)$ gilt.

2. (2 Punkte) Sei $\Omega := (-2,2) \subset \mathbb{R}$. Wir betrachten die Gleichung

$$u_t - x u_{xx} = 0 \text{ in } \Omega \times (0,1).$$

Beweisen Sie, dass $u(x,t) := -2xt - x^2$ die Gleichung löst und berechnen Sie die Stellen des Maximums in $\overline{\Omega} \times [0,1]$. Gilt also das schwache Maximumprinzip für diese Gleichung?

3. (3 Punkte) Gegeben sei ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $u \in C^0(\overline{\Omega})$. Wir betrachten

$$\phi_p(u) := \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Zeigen Sie:

   1. $\lim_{p\longrightarrow\infty} \phi_p(u) = \sup_\Omega |u|$,
   2. $\lim_{p\longrightarrow-\infty} \phi_p(u) = \inf_\Omega |u|$.

4. (4 Punkte) Wir betrachten die nicht-lineare Wärmeleitungsgleichung auf $(0, \pi)$

$$u_t - \Delta u = f(u)$$

auf $(0, T] \times (0, \pi)$ mit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und den Anfangs- und Randbedingungen

$$u(0, x) = \varphi(x) \in C_b^0([0, \pi]),\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \text{ für } t > 0.$$

Schließlich setzen wir

$$v \cdot f(v) \leq 0 \text{ und } f(-v) = -f(v)$$

für alle $v \in \mathbb{R}$ voraus.

1. Zeigen Sie, dass es eine Lösung $u \in C^0([0, T] \times [0, \pi]) \cap C^{1,2}((0, T) \times (0, \pi))$ für eine Zeit $T > 0$ gibt.
   Hinweis: Gehen Sie wie in Blatt 9, Aufgabe 4 bzw. wie in Beispiel 9.5 der Vorlesung vor.
2. Sei u diese Lösung. Zeigen Sie, dass

   $$E_p(t) := \int_0^\pi |u(x, t)|^p dx$$

   für alle $p > 1$ eine wohldefinierte und monoton fallende Funktion ist.
3. Folgern Sie daraus, dass u für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ existiert.
   Hinweis: Leiten Sie aus Teil (a) und Aufgabe 3 eine a-priori-Schranke her.