Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. G. Wang / PD Dr. M. Kühnel

12.7.2010

Einführung in Partielle Differentialgleichungen (Sommer 2010)
Übungsblatt 12 (Abgabe: 19.7.2010 vor der Vorlesung)

1. (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für jede Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ der Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

gilt:

$$u(x+h, t+k) + u(x-h, t-k) = u(x+k, t+h) - u(x-k, t-h)$$

für alle $h, k \in \mathbb{R}$.

2. (3 Punkte) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ die Lösung der Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten die Koordinatentransformation

$$\xi := \frac{x+t}{2}, \eta := \frac{x-t}{2}.$$

Zeigen Sie, dass v gegeben durch

$$v(\eta, \xi) = u(t, x)$$

die Gleichung

$$v_{\xi\eta} = 0$$

löst. Leiten Sie daraus (erneut) her, dass es Funktionen $f, g, \in C^2(\mathbb{R})$ gibt, so dass

$$u(t, x) = f(x+t) + g(x-t)$$

gilt. (u ist also die Transposition einer nach links mit einer nach rechts laufenden Welle.) Zeigen Sie, dass f und g kompakten Träger haben, wenn $\varphi := u(0, .)$ und $\psi := u_t(0, .)$ kompakten Träger haben.

3. (2 Punkte) Berechnen Sie die Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ des Cauchyproblems für die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \\ u(0, x) &= \varphi(x) \\ u_t(0, x) &= \psi(x) \end{aligned}$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$ und die Funktionen

$$\varphi(x) := \sin x, \ \psi(x) = \cos x.$$

bitte wenden

4. (4 Punkte) Gegeben seien die Funktionen $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}), \psi \in C_0^1(\mathbb{R})$ (mit kompaktem Träger!) und $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ als die Lösung des Cauchyproblems für die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \\ u(0,x) &= \varphi(x) \\ u_t(0,x) &= \psi(x) \end{aligned}$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$. Es sei

$$k(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t(t,x)^2 dx$$

die kinetische und

$$p(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_x(t,x)^2 dx$$

die potentielle Energie zur Zeit t. Zeigen Sie:

1. Die Gesamtenergie $p + k$ ist konstant.
2. Es existiert $T > 0$ so, dass für alle $t \geq T$ gilt: $k(t) = p(t)$.
   Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2, um $k - p$ zu berechnen.

. (Punkte) Gegeben seien die Funktionen $C^{\in}(\ )$ $C\ \ (\ )$ **(mit kompaktem Träger) und** $u\ \ C^{\in}(\ \ ^{\in})$ **als die Lösung des Cauchyproblems für die Wellengleichung**

$$\begin{aligned} u\ \ \ u\ \ \ \ &\mathbf{0}\\ u(\mathbf{0}\ \ x)\ \ \ &(x)\\ u\ (\mathbf{0}\ \ x)\ \ \ &(x)\end{aligned}$$

für alle $t\ \ x$ **. Es sei**

$$k(t) : \ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u\ (t\ \ x)^{\in} dx$$

die kinetische und

$$p(t) : \ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u\ \ (t\ \ x)^{\in} dx$$

die potentielle Energie zur Zeit t**. Zeigen Sie:**

1. **Die Gesamtenergie** $p\ \ \ k$ **ist konstant.**
2. **Es existiert** $T\ \ \ \mathbf{0}$ **so dass für alle** $t\ \ \ T$ **gilt:** $k(t)\ \ \ p(t)$**.**
   Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2, um $k\ \ \ p$ *zu berechnen.*