Aufgabe 1
Es seien $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $\beta \in \Omega^l(M)$ geschlossen.

(a) Sei $F : N \to M$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass $F^*\alpha \in \Omega^k(N)$ geschlossen ist, und dass $[F^*\alpha] \in H^k_{\mathrm{dR}}(N)$ nur von $[\alpha] \in H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ abhängt, aber nicht von α selbst abhängt.

(b) Zeigen Sie, dass $\alpha \wedge \beta$ geschlossen ist, und dass $[\alpha \wedge \beta] \in H^{k+l}_{\mathrm{dR}}(M)$ nur von $[\alpha] \in H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ und $[\beta] \in H^l_{\mathrm{dR}}(N)$, aber nicht von α bzw. β abhängt.

Aufgabe 2
Zeigen Sie:

(a) Eine 0–Form $f \in \Omega^0(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$ ist genau dann geschlossen, wenn sie konstant ist.

(b) Jede 1–Form $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R})$ ist exakt.

(c) Bestimmen Sie $H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R})$ für alle k.

Aufgabe 3
Es sei $S^1 = \{p \in \mathbb{R}^2 | \, \|p\| = 1\}$ und $F : \mathbb{R} \to S^1$ gegeben durch

$$F(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi).$$

Zeigen Sie:

(a) Eine 1–Form $\alpha \in \Omega^1(S^1)$ ist genau dann exakt, wenn $F^*\alpha = df$ für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(\varphi + 2\pi n) = f(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Sei $F^*\alpha = g \cdot d\varphi$, dann ist α genau dann exakt, wenn

$$\int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi = 0.$$

(c) Berechnen Sie $H^1_{\mathrm{dR}}(S^1)$.

Aufgabe 4
Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit $n \in \mathbb{N}$ Zusammenhangskomponenten. Zeigen Sie, dass $H^0_{\mathrm{dR}}(M) = \mathbb{R}^n$. Zusatz: Was passiert, wenn M unendlich viele Zusammenhangskomponenten hat?

Abgabe des Übungsblattes am 29.04.2010 vor der Vorlesung.