

Aufgabe 1

Es sei (M^n, g) kompakt, (V, g^V, ∇^V, c) ein Dirac-Bündel über M und D der Dirac-Operator.

- (a) Berechnen Sie $\nabla_X(D\sigma) - D(\nabla_X\sigma)$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\sigma \in \Gamma(V)$.
- (b) Zeigen Sie, dass eine Konstante C existiert, so dass

$$\sum_{i=1}^n \|D(\nabla_{e_i}\sigma)\|_0^2 \leq C \sum_{i=1}^n (\|\nabla_{e_i}D\sigma\|_0^2 + \|\sigma\|_0^2).$$

- (c) Folgern Sie mit Hilfe der Gårding-Ungleichung die elliptische Abschätzung aus Satz 5.6(2) für $k = 2$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie:

- (a) Für alle $f \in C^\infty(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt $\operatorname{div}(fX) = X(f) + f \cdot \operatorname{div} X$.
- (b) Für kompakte Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) mit Rand ∂M gilt die Greensche Formel

$$\int_M (f\Delta h - h\Delta f) d\operatorname{vol}_g = \int_{\partial M} (f \cdot \nu(h) - h \cdot \nu(f)) d\operatorname{vol}_g^{\partial M}$$

wobei ν das äußere Einheitsnormalenfeld an ∂M bezeichnet, $f, h \in C^\infty(M)$, sowie $\Delta f = \operatorname{tr}_g(\nabla^2 f) = \operatorname{div}(\nabla f)$ der (negative) Laplace Operator auf Funktionen ist.

Aufgabe 3

Es sei Σ_{2k} das komplexe Spinormodul zu $\mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^{2k})$ aus Definition 4.51 und $\omega = (-i)^k c_{e_1} \cdots c_{e_{2k}}$ das komplexe Volumenelement aus Aufgabe 1 von Blatt 9 für eine Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_{2k}$. Zeigen Sie für $1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq 2k$

- (a) Falls $j > 0$, so existiert $1 \leq l \leq 2k$ derart, dass $\varphi(e^l)$ mit $\varphi(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_j})$ antikommutiert in $\mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^{2k})$.

- (b)

$$\operatorname{tr}_\Sigma (c(\varphi(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_j}))) = \begin{cases} 2^k & j = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- (c)

$$\operatorname{tr}_\Sigma (\omega \circ c(\varphi(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_j}))) = \begin{cases} (2i)^k & j = 2k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 4

Es sei $A \in \mathfrak{so}(2k) \subset M_{2k}(\mathbb{R})$ eine schiefsymmetrische Matrix und $\psi_* A \in \mathfrak{spin}(2k) \subset \mathbb{C}\ell(\mathbb{R}^{2k})$ wie in Bemerkung 4.47(4) gegeben. Es seien Σ und ω wie in Aufgabe 3. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{tr}_\Sigma(e^{\psi_* A}) = \det(2 \cosh \frac{A}{2})^{1/2}.$

(b) $\operatorname{tr}_\Sigma(\omega e^{\psi_* A}) = \operatorname{Pf}(2i \sinh \frac{A}{2}).$

Hinweis: Nehmen Sie an, dass A die Gestalt aus Bemerkung 4.47(5) hat, und benutzen Sie Aufgabe 3.

Abgabe des Übungsblattes am 15.07.2010 vor der Vorlesung.