Aufgabe 1
Es sei $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n |\ |x| \leq 1\}$ und $S^{n-1} = \partial D^n$.

(a) Es gibt keine glatte Abbildung $F : D^n \to S^{n-1}$ mit $F_{|S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$. Nutzen Sie die Funktorialität von H^{n-1}_{dR} aus.

(b) Sei $f : D^n \to D^n$ glatt. Falls f keinen Fixpunkt hat, kann man $F : D^n \to S^{n-1}$ konstruieren, wobei $F(p) \in D^n$ der Schnittpunkt der Verlängerung der Strecke von $f(p)$ nach p mit S^{n-1} sei.

(c) Jede glatte Abbildung $f : D^n \to D^n$ hat einen Fixpunkt.

Aufgabe 2
Beweisen Sie im Schlangenlemma:

(a) die Wohldefiniertheit von $\delta : H^k(V'', d) \to H^{k+1}(V', d)$.

(b) die Exaktheit der Sequenz an einer Stelle $H^k(V', d)$, $H^k(V, d)$ oder $H^k(V'', d)$.

Aufgabe 3
Es sei $\mathcal{U} = (U_i)$ eine offene Überdeckung von M und (φ_i) eine untergeordnete Partition der Eins (siehe Seite 15 im Skript). Sei $h : \check{C}^k(\mathcal{U}; \Omega^l) \to \check{C}^{k-1}(\mathcal{U}; \Omega^l)$ gegeben durch

$$(h\alpha)_{i_0,\ldots,i_{k-1}} = \sum_l \varphi_l \cdot \alpha_{l,i_0,\ldots,i_{k-1}}.$$

Zeigen Sie, dass $\check{\delta} \circ h^k + h^{k+1}\check{\delta} = \mathrm{id}$, insbesondere ist der Komplex

$$0 \to \Omega^l(M) \to \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^l) \to \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^l) \to \cdots$$

exakt.

Aufgabe 4
Konstruieren Sie eine Umkehrabbildung zur Abbildung $H^k_{\mathrm{dR}}(M) \to H^k(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ aus dem Satz von de Rham, indem Sie ausgehend von einem Repräsentanten $\alpha \in \check{C}^k(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ einen Kozykel im Čech- de Rham Doppelkomplex mit Hilfe von Aufgabe 3 konstruieren. Um zu zeigen, dass die Abbildungen zueinander invers sind, vergleichen Sie die zwei beteiligten Kozykel wie beim Beweis der Wohldefiniertheit.

Abgabe des Übungsblattes am 06.05.2010 vor der Vorlesung.