

Aufgabe 1

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Injektivitätsradius $\rho(M) = \inf_{p \in M} \rho(p)$ und definiere

$$c(p) = \sup\{r > 0 \mid B_r(p) \text{ ist geodätisch konvex}\}.$$

- (a) Zeigen Sie: $c(p) \geq \frac{1}{2}\rho(M) > 0$ für alle $p \in M$, falls M kompakt ist.
- (b) Für jedes p ist $c(p) > 0$ selbst dann, wenn M nicht kompakt ist.

Aufgabe 2

Sei $A \subsetneq \mathbb{R}$, M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U}$ eine gute Überdeckung von M . Zeigen Sie:

- (a) Es gilt:

$$d\Omega^{k-1}(M) \subset \Omega_A^k(M) \subset \ker d \subset \Omega^k(M).$$

- (b) Jeder Deligne-Kozykel $(\alpha^k, \dots, \alpha^0) \in \hat{C}_k^k(\mathcal{U}; A)$ lässt sich eindeutig zu einem erweiterten Čech-de Rham-Kozykel $(\alpha^k, \dots, \alpha^0, \alpha)$ mit $\alpha \in \Omega_A^k(M)$ fortsetzen.
- (c) Die Form α in (b) hängt nur von der Deligne-Klasse $[(\alpha^k, \dots, \alpha^0)] \in \hat{H}^k(M; A)$ ab.
- (d) Sei $\alpha = 0$ in (b), dann wird $[(\alpha^k, \dots, \alpha^0)] \in \hat{H}^k(M; A)$ durch einen Deligne-Kozykel der Form $(\beta^k, \beta^{k-1}, 0, \dots, 0)$ mit $\beta^k \in \check{C}^k(\mathcal{U}; \underline{A})$ und $\beta^{k-1} \in \check{C}^{k-1}(\mathcal{U}; \mathbb{R}) \subset \check{C}^{k-1}(\mathcal{U}; \Omega^0)$ repräsentiert.

Aufgabe 3

Es seien $M, \mathcal{U}$ und A wie oben, definiere

$$\check{C}^k(\mathcal{U}; \mathbb{R}, \underline{A}) = \check{C}^k(\mathcal{U}; \mathbb{R}) \oplus \check{C}^{k+1}(\mathcal{U}; \underline{A}),$$

und sei $\delta : \check{C}^k(\mathcal{U}; \mathbb{R}, \underline{A}) \rightarrow \check{C}^{k+1}(\mathcal{U}; \mathbb{R}, \underline{A})$ gegeben durch

$$\delta(\beta, \gamma) = (\varepsilon(\gamma) - \check{\delta}\beta, \check{\delta}\gamma).$$

Zeigen Sie, dass $(\check{C}^k(\mathcal{U}; \mathbb{R}, \underline{A}), \delta)$ einen Kokettenkomplex definiert, dessen Kohomologie zu $\check{H}^\bullet(\mathcal{U}; \mathbb{R}/A)$ isomorph ist. Betrachten Sie dazu die Kokettenabbildung $\check{C}^k(\mathcal{U}; \mathbb{R}, \underline{A}) \rightarrow \check{C}^k(\mathcal{U}; \mathbb{R}/A)$, die (β, γ) auf $\beta \bmod A$ abbildet.

Aufgabe 4

Es seien $U, V \subset (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $F : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass $F(\partial U) = \partial V$ wobei $\partial U = U \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und ∂V entsprechend. *Zusatz:* Die entsprechende Aussage gilt auch für Homöomorphismen.

Abgabe des Übungsblattes am 18.05.2010 vor der Vorlesung.