Aufgabe 1
Es sei $o(TM) \to M$ die Orientierungsüberlagerung aus Definition 2.31 und $F : o(TM) \to o(TM)$, $(p, o) \mapsto (p, -o)$ die Orientierungsumkehrung aus Bemerkung 2.32(2). Wir definieren die *getwisteten Differentialformen*

$$\Omega^\bullet(M; o(TM))) = \{\alpha \in \Omega^\bullet(o(TM)) \mid F^*\alpha = -\alpha\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\Omega^\bullet(o(TM)) \cong \Omega^\bullet(M) \oplus \Omega^\bullet(M; o(TM))$ als $C^\infty(M)$–Moduln.

(b) Sei M orientierbar, dann gibt es einen $C^\infty(M)$-linearen Isomorphismus

$$\Omega^\bullet(M; o(TM)) \cong \Omega^\bullet(M)$$

der mit der äußeren Ableitung verträglich, aber nicht eindeutig ist. *Zusatz: Bestimmen Sie alle solche Isomorphismen.*

(c) Das Integral $\int_M : \Omega^n(M; o(TM)) \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert, wobei $n = \dim M$.

(d) Sei g eine Riemannsche Metrik, dann ist die Volumenform $\omega_g \in \Omega^n(M; o(TM))$ wohldefiniert.

Aufgabe 2
Es sei $\mathcal{U}$ eine gute Überdeckung von M, $A \subsetneq \mathbb{R}$ eine Untergruppe, und $\delta : \hat{H}^k(M; A) \to \check{H}^k(\mathcal{U}; A)$ die Abbildung aus Bemerkung 3.52(5). Zeigen Sie:

(a) $r : \Omega^{k-1}(M) \to \hat{C}^k_k(\mathcal{U}; A) \to \hat{H}^k(M; A)$ bildet surjektiv auf $\ker \delta$ ab.

(b) Für die Abbildung aus (a) gilt $\ker r = \Omega^{k-1}_A(M)$.

(c) Die Sequenz in Bemerkung 3.52(5) ist exakt.

Aufgabe 3
Es sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von M, $\big(g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{Gl}_k(\mathbb{k})\big)_{ij}$ erfülle die Kozykelbedingung aus Bemerkung 4.4(1), und sei

$$V = \coprod_{i\in I} U_i \times \mathbb{k}^k / \sim$$

wie im Beweis der Proposition 4.5 konstruiert mit

$$\mathcal{O} = \{W \subset V \mid W \cap U_i \times \mathbb{k}^k \text{ offen für alle } i \in I\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf V definiert, und dass $(V, \mathcal{O})$ ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis ist.

Aufgabe 4
Es sei $\tau \to \mathbb{CP}^1 \cong S^2$ das tautologische Bündel. Zeigen Sie: Faßt man $\tau \otimes_{\mathbb{C}} \tau$ als zweidimensionales reelles Vektorbündel $(\tau \otimes_{\mathbb{C}} \tau)_{\mathbb{R}}$ auf, dann gilt

$$(\tau \otimes_{\mathbb{C}} \tau)_{\mathbb{R}} \cong TS^2.$$

Abgabe des Übungsblattes am 01.06.2010 vor der Vorlesung.