Aufgabe 1
Es sei $V \to M$ ein $\Bbbk$–Vektorbündel. Zeigen Sie:

(a) Seien g_0, g_1 zwei Metriken auf V, dann gibt es einen Automorphismus $F \in \Gamma(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, V))$, so dass $g_1(\sigma, \tau) = g_0(F(\sigma), F(\tau))$ für alle $\sigma, \tau \in \Gamma(V)$.

(b) Der Automorphismus F kann stetig in g_0 und g_1 konstruiert werden bezüglich der Supremumsnorm.

Aufgabe 2
Es sei ∇^{TM} ein torsionsfreier Zusammenhang auf TM. Dann gilt für den induzierten Zusammenhang auf $\Lambda^k TM$, dass

$$d\alpha(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (\nabla^{TM}_{X_i} \alpha)(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_k).$$

Hinweis: Cartan Formel für $d\alpha$.

Aufgabe 3
Es sei ∇^{TM} ein torsionsfreier Zusammenhang auf TM, und ∇ der von ∇^{TM} und einem Zusammenhang ∇^V auf $\Lambda^2 TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{End}(V) \to M$ induzierte Zusammenhang. Sei $F = (\nabla^V)^2$ die Krümmung von ∇^V, dann ist die zweite Bianchi-Identität äquivalent zu

$$(\nabla_X F)_{Y,Z}\sigma + (\nabla_Y F)_{Z,X}\sigma + (\nabla_Z F)_{X,Y}\sigma = 0$$

für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ und $\sigma \in \Gamma(V)$.

Aufgabe 4
Es sei

$$\Delta^k = \{(t_0, \dots, t_k) \in [0, \infty)^{k+1} \mid t_0 + \dots + t_k = 1\}$$

das Standardsimplex und $\partial_i : \Delta^{k-1} \to \Delta^k$ für $i = 0, \dots, k$ gegeben durch

$$\partial_i(t_0, \dots, t_{k-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{k-1}).$$

Die Basis $(e_1 - e_0, \dots, e_k - e_0)$ von $T_t\Delta^k$ sei für alle $t \in \Delta^k$ positiv orientiert. Ein glattes singuläres k–Simplex in einer Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\Delta^k; M)$. Für $\alpha \in \Omega^k(M)$ definieren wir

$$\alpha(\sigma) = \int_{\Delta^k} \sigma^* \alpha.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt stets $(d\alpha)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \alpha(\sigma \circ \partial_i)$.

(b) Es sei A abelsche Gruppe und $C^k_\Delta(M; A)$ die Menge aller (beliebigen) Abbildungen von $\mathcal{C}^\infty(\Delta^k; M)$ nach A, dann bildet $(C^k_\Delta(M; A), \delta)$ einen Kokettenkomplex mit

$$(\delta c)(\sigma) = \sum (-1)^i c(\sigma \circ \partial_i).$$

(c) Die Integration liefert eine Kokettenabbildung

$$(\Omega^\bullet(M), d) \to (C^\bullet_\Delta(M; \mathbb{R}), \delta).$$

Abgabe des Übungsblattes am 10.06.2010 vor der Vorlesung.