Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass

(a) $\mathrm{ch}(V \oplus W) = \mathrm{ch}(V) + \mathrm{ch}(W)$.

(b) $\mathrm{ch}(V \otimes W) = \mathrm{ch}(W) \wedge \mathrm{ch}(W)$.

(c) $\mathrm{ch}(V^*) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \mathrm{ch}(V)^{[2i]}$.

Aufgabe 2
Es sei $V \to M$ ein reelles Vektorbündel vom Rang k, $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine gute Überdeckung von M, so dass Trivialisierungen $\psi_i : V_{|U_i} \to \mathbb{R}^k$ existieren mit Übergangsmatrizen $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{Gl}_k(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) $w_1(V, \psi) = (\mathrm{sign}\ \det(g_{ij}))_{i,j}$ definiert einen Kozykel in $\check{C}^1(\mathcal{U}; \{1, -1\})$, dessen Klasse $w_1(V) \in H^1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ unabhängig von der Wahl der Trivialisierung ψ_i ist.

(b) Es gilt $w_1(V) = 0$ genau dann, wenn V orientierbar ist.

(c) Die Klasse w_1 klassifiziert reelle Geradenbündel.

Aufgabe 3
Sei $\mathcal{U} = (U_i)$ eine gute Überdeckung von M. Zeigen Sie mit Prop. 4.5: Ein komplexes Vektorbündel $L \to M$ vom Rang 1 wird gegeben durch Funktionen $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $g_{jk} \cdot g_{ik}^{-1} \cdot g_{ij} = 1$ auf $U_i \cap U_j \cap U_k$. Ein Zusammenhang auf L wird gegeben durch $\omega_i \in \Omega^1(U_i; \mathbb{C})$ mit $\nabla s_i = \omega_i \cdot s_i$, wobei $\psi_i \circ s_i \equiv 1$ sowie
$$\omega_j - \omega_i = -d \ln g_{ij}.$$
Wann stellen Tupel $\big((\omega_i), (g_{ij})_{i,j}\big)$ isomorphe Vektorbündel mit Zusammenhang dar?

Aufgabe 4
Wir definieren den komplexen Deligne-Komplex $\hat{C}^\bullet_{k,\mathbb{C}}(\mathcal{U}; A)$ wie $\hat{C}^\bullet_k(\mathcal{U}; A)$, ersetzen aber $\Omega^i(\ldots)$ überall durch $\Omega^i(\ldots, \mathbb{C})$. Seien $\big((\omega_i), (g_{ij})_{i,j}\big)$ wie oben, und seien $l_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}$ Funktionen, so dass $e^{l_{ij}} = g_{ij}$. Zeigen Sie:

(a)
$$\hat{c}_1(w, g) = -\frac{1}{2\pi i}\Big((l_{jk} - l_{ik} + l_{ij})_{i,j,k}, (l_{ij})_{i,j}, (w_i)_i\Big)$$
ist ein Deligne-Kozykel in $\hat{C}^\bullet_{2,\mathbb{C}}(\mathcal{U}; \mathbb{Z})$ mit Krümmung $d\hat{c}_1(\omega, g) = c_1(L, \nabla^L) \in \Omega^2(M; \mathbb{C})$.

(b) Die Deligne Klasse $\hat{c}_1(L, \nabla^L)$ von $\hat{c}_1(w, g)$ hängt nur von L und ∇^L ab, nicht aber von der Wahl der g_{ij} sowie w_i.

(c) Die Klasse $\hat{c}_1$ liefert eine Bijektion der Isomorphieklassen komplexer Geradenbündel mit Zusammenhang und $\hat{H}^2_{\mathbb{C}}(M; \mathbb{Z})$.

(d) Zusatz: $\hat{c}_1(L \otimes_{\mathbb{C}} L, \nabla^{L \otimes L'}) = \hat{c}_1(L, \nabla^L) + \hat{c}_1(L', \nabla^{L'})$.

Abgabe des Übungsblattes am 17.06.2010 vor der Vorlesung.