Aufgabe 1
Sei V^n ein reeller Vektorraum mit Metrik g, $e_1, \dots, e_n$ eine orientierte Orthonormalbasis von V, $\omega := e_1 \cdots e_n \in Cl(V,g)$ das Volumenelement in der Clifford algebra und $\varphi : \Lambda^\bullet V \to Cl(V,g)$ der natürliche Isomorphismus aus Proposition 4.36. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\omega^2 = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ sowie $v \cdot \omega = (-1)^{n-1} \omega \cdot v$ für alle $v \in V \subset Cl(V,g)$.

(b) Für $\alpha, \beta \in \Lambda^2 V$ gilt

$$\varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta) + \varphi(\beta) \cdot \varphi(\alpha) = -2 \langle \alpha, \beta \rangle + 2\varphi(\alpha \wedge \beta).$$

Aufgabe 2
Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung

$$\widehat{c} : TM \to \operatorname{End}(\Lambda^\bullet TM), X \mapsto \widehat{c}_X \quad \text{mit} \quad \widehat{c}_X \alpha = \big(g(X,.) \wedge + \imath_X\big)(-1)^{\deg \alpha} \alpha$$

aus Beispiel 4.41(2) definiert eine Dirac-Bündel Struktur auf $(\Lambda^\bullet TM, g^{\Lambda^\bullet TM}, \nabla^{\Lambda^\bullet TM})$.

(b) Für alle $X, Y \in TM$ gilt $c_X \circ \widehat{c}_Y = \widehat{c}_Y \circ c_X$.

(c) Die Abbildung $(-1)^{\frac{\deg(\deg -1)}{2}} \in \operatorname{End}(\Lambda^\bullet TM)$ mit $\alpha \mapsto (-1)^{k(k-1)/2} \alpha$ für alle $\alpha \in \Lambda^k(M)$ vertauscht c und $\widehat{c}$, d.h.

$$c_X \circ (-1)^{\frac{\deg(\deg -1)}{2}} = (-1)^{\frac{\deg(\deg -1)}{2}} \circ \widehat{c}_X.$$

Aufgabe 3
Sei (M^n, g) orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Volumenform $d\mathrm{vol}_g$. Wir definieren den Hodge Stern Operator $\star \in \operatorname{End}(\Omega^\bullet(M))$ durch $\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ mit

$$\alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \cdot d\mathrm{vol}_g$$

für alle $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$. Zeigen Sie:

(a) $\star 1 = d\mathrm{vol}_g$ und $\star^2 \alpha = (-1)^{k(n-k)} \alpha$ für $\alpha \in \Omega^k(M)$.

(b) Benutzt man die lokale Darstellung von δ aus Satz 4.32, dann gilt $\delta\alpha = -(-1)^{(k-1)(n-k)} \star d \star \alpha$ für $\alpha \in \Omega^k(M)$.

(c) $\star$ liefert Isomorphismen $\mathcal{H}^k(M) \to \mathcal{H}^{n-k}(M)$ für alle k, wobei $\mathcal{H}^k(M) = \ker(d+\delta) \cap \Omega^k(M)$ den Vektorraum der harmonischen k–Formen bezeichnet.

Aufgabe 4
Es sei (M,g) eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit und V ein Vektorbündel mit Metrik g^V und metrischem Zusammenhang ∇^V. Seien $\sigma, \tau \in \Gamma(V)$ und $e_1, \dots, e_n$ eine lokale Orthonormalbasis von TM. Wir setzen

$$X = \sum_{i=1}^n g^V(\nabla^V_{e_i} \sigma, \tau) \cdot e_i.$$

(a) Zeigen Sie, dass X nicht von der Wahl der Orthonormalbasis abhängt, somit $X \in \mathfrak{X}(M)$.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{div} X$ und schießen Sie, dass

$$\left\langle \Delta^V \sigma, \tau \right\rangle_{L^2} = \left\langle \nabla^V \sigma, \nabla^V \tau \right\rangle_{L^2},$$

wobei wir rechts die Metrik $g^{T^*M \otimes V}$ auf $T^*M \otimes V$ zugrunde legen. *Hinweis: Benutzen Sie a), um eine geeignete Orthonormalbasis zu wählen.*

Abgabe des Übungsblattes am 24.06.2010 vor der Vorlesung.