

Aufgabe 1

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\hat{c}$ wie in Aufgabe 2 Serie 7. Zeigen Sie:

- (a) Für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ mit $g(X, Y) = 0$ gilt:

$$c_X c_Y + \hat{c}_X \hat{c}_Y = 2(g(Y, \cdot) \wedge \circ \iota_X - g(X, \cdot) \wedge \circ \iota_Y)$$

- (b) Die Krümmung $F^{\Lambda^\bullet TM}$ wird gegeben durch $c(F^S) + \hat{c}(F^S)$.

- (c) Die Twist-Krümmung des Dirac-Bündels $(\Lambda^\bullet TM, g^{\Lambda^\bullet TM}, \nabla^{\Lambda^\bullet TM}, c)$ wird gegeben durch

$$\hat{c}(F^S) = \frac{1}{4} \sum_{i,j} g(R_{\cdot, \cdot} e_i, e_j) \hat{c}_{e_i} \hat{c}_{e_j}.$$

Aufgabe 2

Auf $\mathbb{H}$ wird die Euklidische Norm durch $|q| := \sqrt{q\bar{q}}$ gegeben, wobei $\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \text{Spin}(3) &\cong \{(q, q) \in \mathbb{H}^2 \mid |q| = 1\} \cong S^3 \\ \text{Pin}(3) &\cong \{(q, \pm q) \in \mathbb{H}^2 \mid |q| = 1\} \cong S^3 \sqcup S^3 \end{aligned}$$

Hinweis: Schreiben Sie jedes Element von $\text{Spin}(3)$ als Produkt zweier Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^3 = \{(q, -q) \mid q + \bar{q} = 0\}$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass $\mathbb{H}$ isomorph ist zum komplexen Spinormodul Σ_2 . Geben Sie dazu an, wie $i = e_1, j = e_2 \in \mathbb{H} \cong \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^2, g)$ wirken, und wie man mit einem Skalar $z \in \mathbb{C}$ multipliziert.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die zwei Spinormoduln $\Sigma_3^+, \Sigma_3^- \cong \mathbb{H}$ von $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^3, g)$, in dem Sie wieder $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^3, g) \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ ausnutzen.

Abgabe des Übungsblattes am 01.07.2010 vor der Vorlesung.