Aufgabe 1

Es sei n gerade und $\omega = (-i)^{n/2} c_{e_1} \cdots c_{e_n}$ das komplexe Clifford-Volumenelement. Nach Proposition 4.51 ist ω selbstadjungiert mit $\omega^2 = 1$. Zeigen Sie:

- (a) Σ_n zerfällt in die direkte Summe der Eigenräume Σ_n^+ und Σ_n^- zu den Eigenwerten ± 1 .
- (b) Elemente von $\mathcal{C}\ell^{ev}(\mathbb{R}^n, g)$ bilden $\Sigma_n^\pm$ unter Clifford Multiplikation auf sich ab, Elemente von $\mathcal{C}\ell^{od}(\mathbb{R}^n, g)$ vertauschen Σ_n^+ und Σ_n^- .
- (c) Es gilt $\dim \Sigma_n^+ = \dim \Sigma_n^- = 2^{\frac{n}{2}-1}$.

Aufgabe 2

Wir betrachten den $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Sei $\Sigma_4^\pm$ wie in Aufgabe 1 und $\star : \Lambda^2 \mathbb{R}^4 \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^4$ der Hodge Stern Operator aus Aufgabe 2 Serie 7 betrachtet als Endomorphismus auf $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$. Nach Teil a) von Aufgabe 2 Serie 7 folgt $\star^2 = \text{id}$, d.h. $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$ zerfällt orthogonal in Eigenräume $\Lambda^{2,\pm}$ von $\star$ zu Eigenwerten ± 1 .

- (a) Bestimmen Sie orthogonale Basen von $\Lambda^{2,+}$ und $\Lambda^{2,-}$, indem Sie zuerst

$$\star(e^{\sigma(1)} \wedge e^{\sigma(2)}) = \text{sign}(\sigma) \cdot e^{\sigma(3)} \wedge e^{\sigma(4)}$$

zeigen für alle $\sigma \in S(4)$.

- (b) Sei $\varphi : \Lambda^\bullet \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4, g) \subset \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4, g)$ der natürliche Isomorphismus aus Proposition 4.36 und $\tilde{c} := c \circ \varphi : \Lambda^\bullet \mathbb{R}^4 \rightarrow \text{End}(\Sigma_4)$ die entsprechende Komposition mit der Clifford Multiplikation $c : \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4, g) \rightarrow \text{End}(\Sigma_4)$. Zeigen Sie, dass $\tilde{c} \cong \tilde{c}^+ \oplus \tilde{c}^-$ wobei $\tilde{c}^\pm : \Lambda^{2,\pm} \rightarrow \text{End}(\Sigma_4^\pm)$. *Hinweis: Berechnen Sie $\tilde{c}(\eta_i)^2$ für die Basiselemente aus Teil a) und überlegen Sie, dass $i\tilde{c}(\eta)$ hermitesch ist für alle $\eta \in \Lambda^2 \mathbb{R}^4$.*
- (c) Bezeichne $\text{End}_0(\Sigma_4^\pm)$ die spurfreien Endomorphismen von $\Sigma_4^\pm$, dann sind:

$$\tilde{c}^\pm : \Lambda^{2,\pm} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \text{End}_0(\Sigma^\pm)$$

Isomorphismen.

Aufgabe 3

Sei $n = 2k + 1$ ungerade und $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{2k+1}, g) \cong M_{2k}(\mathbb{C}) \oplus M_{2k}(\mathbb{C})$, dann gilt

$$\mathcal{C}\ell^{ev}(\mathbb{R}^{2k+1}, g) = \{(A, A) \mid A \in M_{2k}(\mathbb{C})\}$$

und

$$\mathcal{C}\ell^{od}(\mathbb{R}^{2k+1}, g) = \{(A, -A) \mid A \in M_{2k}(\mathbb{C})\}.$$

Aufgabe 4

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M und (V, g^V, ∇^V, c) ein Dirac Bündel über M mit Dirac operator $D : \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(V)$. Dann gilt für $\sigma, \tau \in \Gamma(V)$ mit $\text{supp}(\sigma) \subset M$ kompakt:

$$\int_M \langle D\sigma, \tau \rangle \cdot d\text{vol}_g = \int_M \langle \sigma, D\tau \rangle d\text{vol}_g + \int_{\partial M} \langle c_\nu(\sigma), \tau \rangle \cdot d\text{vol}_g^{\partial M}$$

wobei ν das äußere Einheitsnormalenfeld an ∂M bezeichnet.

Abgabe des Übungsblattes am 08.07.2010 vor der Vorlesung.