Homogene Räume

Übungsblatt 1

1. Zeigen Sie die 1-1 Korrespondenz von Links- und Rechtswirkungen.

2. Für $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ bezeichne $Re(q) := a$ den Realteil und $Im(q) := bi + cj + dk$ den rein quaternionischen Teil. Betrachten Sie $\mathbb{R}^3 \cong \{q \in \mathbb{H} | Re(q) = 0\}$ und zeigen Sie, dass für das Kreuzprodukt $\times$ im $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ folgendes gilt: $v \times w = Im(v \cdot w)$.

3. (a) Zeigen Sie: $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in Mat(2; \mathbb{C}) | a, b \in \mathbb{C} \right\}$ ist eine $\mathbb{R}$-Algebra und als solche isomorph zu $\mathbb{H}$.

   (b) Folgern Sie aus a):
   $SU(2) := \{A \in Mat(2; \mathbb{C}) | A^* A = 1, det A = 1\} \cong$
   $Sp(1) := \{h \in \mathbb{H} | |h|^2 = h \cdot \bar{h} = 1\}$ als Gruppen.

   (c) Zeigen Sie: $Sp(1) = S^3 \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$.

4. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit (positiv-definitem) Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hermitisch, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$G := \{A \in End(V) | \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle \, \forall v, w \in V\}$$

   eine kompakte Lie-Gruppe ist und bestimmen Sie deren Dimension.
   Hinweis: Benutzen Sie den Satz vom regulären Wert für eine geeignete Abbildung.