Homogene Räume

Übungsblatt 10

1. Eine abelsche Liegruppe G schreibt sich als Produkt
$$G = T \times V \times D,$$
wobei T ein Torus, V ein Vektorraum und D eine diskrete Gruppe ist.

2. Seien $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V), \chi : G \to \mathrm{Aut}(W)$ und $\psi : H \to \mathrm{Aut}(Z)$ Darstellungen der Liegruppen G, H. Überlegen Sie sich Formeln, so dass folgende Konstruktionen ebenfalls Darstellungen sind:
   (a) $\rho \oplus \psi : G \times H \to \mathrm{Aut}(V \oplus Z)$
   (b) $\rho \otimes \psi : G \times H \to \mathrm{Aut}(V \otimes Z)$
   (c) $\rho \boxplus \chi : G \to G \times G \to \mathrm{Aut}(V \oplus W)$
   (d) $\rho \boxtimes \chi : G \to G \times G \to \mathrm{Aut}(V \otimes W)$
   (e) $\Lambda^k(\rho) : G \to \mathrm{Aut}(\Lambda^k V)$
   (f) $\rho^* : G \to \mathrm{Aut}(V^*)$

3. (a) Zeigen Sie:
$$S^{2n+1} = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{SU}(n) \quad \text{und} \quad S^{4n+3} = \mathrm{Sp}(n+1)/\mathrm{Sp}(n)$$
   sind nicht isotropie-irreduzibel.
   (b) Sei G eine kompakte einfache Liegruppe. Schreiben Sie G als isotropie-irreduziblen homogenen Raum G'/H'.

4. Berechnen Sie die Killingform von $\mathrm{SO}(n), \mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n)$ und $\mathrm{Sp}(n)$. Ist $\mathrm{U}(n)$ halbeinfach?

5. Zeigen Sie:
$$\mathrm{Ad} : \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{so}(n))$$
ist äquivalent zur Standarddarstellung
$$\mathrm{SO}(n) \to \mathrm{Aut}(\Lambda^2 \mathbb{R}^n).$$