Homogene Räume

Übungsblatt 11

1. Sei $M = G/H$ homogen mit $H = G_p$ kompakt, dann ist die Isotropiedarstellung $\chi : H \to \mathrm{Aut}(\mathrm{T}_p M)$ injektiv.

2. Bestimmen Sie die Schnittkrümmungen der normal-homogenen Metriken auf

$$S^{2n+1} = \mathrm{SO}(2n+2)/\mathrm{SO}(2n+1) \quad \text{und} \quad S^{2n+1} = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{SU}(n).$$

   Sind diese Metriken Einstein?

3. Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Bezeichne

$$\mathrm{rk}(M, g) := \max\{k | \exists \text{ isometrische Immersion } \iota : (\mathbb{R}^k, g_{euk}) \to (M, g)\}$$

   Zeigen Sie:

   (a) $\mathrm{rk}(M, g) \geq 1$.

   (b) Für einen symmetrische Raum $(M = G/H, g)$ gilt:

$$\mathrm{rk}(M, g) = \max\{\dim V | V \subset \mathfrak{p}, [V, V] = 0\},$$

   wobei $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \cong \mathrm{T}_{eH} M$.

   (c) Für einen symmetrischen Raum (M, g) gilt $rk(M, g) = 1$ genau dann, wenn die Schnittkrümmung positiv ist.