Homogene Räume

Übungsblatt 2

1. Sei
$$O(n) = \{A \in Mat(n;\mathbb{R}) | A^t A = 1\}$$
$$SO(n) = \{A \in O(n) | det(A) = 1\}.$$
Zeigen Sie, dass
   (a) $O(2n+1) \cong SO(2n+1) \times \mathbb{Z}_2$ als Liegruppen.
   (b) $O(2n)$ ist diffeomorph zu $SO(2n) \times \mathbb{Z}_2$, aber $O(2n)$ ist nicht isomorph zur Gruppe $SO(2n) \times \mathbb{Z}_2$.

2. Die maximalen Integralkurven eines linksinvarianten Vektorfeldes durch das neutrale Element sind 1-Parametergruppen.

3. Sei G die Lie-Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale:
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in Mat(n;\mathbb{R}) \right\}.$$
Bestimmen Sie die Liealgebra $\mathfrak{g} \subset Mat(n;\mathbb{R})$ und zeigen Sie, dass die Exponentialabbildung
$$exp : \mathfrak{g} \to G$$
ein Diffeomorphismus ist.
Hinweis: Logarithmus-Reihe!

4. Sei G eine Liegruppe und $H \subset G$ eine diskrete Untergruppe. Dann ist $H \subset G$ abgeschlossen. (diskret heißt: $\forall h \in H \quad \exists U \subset G$ offen, mit $H \cap U = \{h\}$). Geben Sie ein Beispiel einer Mannigfaltigkeit M und einer diskreten Menge $A \subset M$ an, so dass A nicht abgeschlossen in M ist.