Homogene Räume

Übungsblatt 3

1. Sei $\mu : G \times G \to G$ die Multiplikation der Liegruppe G. Zeigen Sie, dass das Differential $d\mu_e : T_{e,e}(G \times G) \cong T_eG \oplus T_eG \to T_eG$ die Addition der Liealgebra ist.

2. Zeigen Sie
$$ad : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}), X \mapsto [X, \cdot]_{\mathfrak{g}},$$
d.h. $ad(X)(Y) = [X, Y]_{\mathfrak{g}}$.
Zeigen Sie außerdem, dass die Jacobiidentität für $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$ äquivalent dazu ist, dass $ad : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ ein Liealgebrenhomomorphismus ist. (Die Lieklammer auf $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ ist gegeben durch $[f, h] = f \circ h - h \circ f$.)

3. Sei G eine zusammenhängende Liegruppe und $U \subset G$ eine Umgebung der $1 \in G$. Zeigen Sie, dass das Gruppenerzeugnis $\langle U \rangle$ von U bereits die ganze Gruppe G ist.

4. Sei G eine zusammenhängende Liegruppe. Es ist äquivalent:
   (a) G ist abelsch.
   (b) $\mathfrak{g}$ ist abelsch, d.h. $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}} = 0$.
   (c) Die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \to G$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

5. Die Liegruppe $G = S^1 \times S^1$ besitzt abelsche Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Setze für $r \in \mathbb{R}$
$$\gamma_r(t) : \mathbb{R} \to G, t \mapsto (e^{2\pi irt}, e^{2\pi it}).$$
Dann ist $\mathfrak{h} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\gamma_r'(0)) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(2\pi r, 2\pi)$ eine Lieunteralgebra von $\mathfrak{g}$. Zeigen Sie, dass $\exp(\mathfrak{h}) = \mathrm{Im}(\gamma) \subset G$ genau dann eine Lieuntergruppe von G ist, wenn $r \in \mathbb{Q}$ gilt.