Homogene Räume

Übungsblatt 4

1. Sei $H \subset G$ eine Lieuntergruppe. Dann ist G/H ein G-homogener Raum.

2. Sei G eine Liegruppe.

   (a) Sei $H \subset G$ eine normale Lieuntergruppe, dann ist G/H mit der induzierten Multiplikation eine Liegruppe.

   (b) Bezeichne G_0 die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements $e \in G$, dann ist G/G_0 eine diskrete Liegruppe.

   (c) Falls G abelsch ist, so gilt

   $$G \cong G_0 \times G/G_0.$$

3. $\mathbb{RP}^3$ ist diffeomorph zu $\mathrm{SO}(3)$.

4. Sei M die Menge der symmetrischen, positiv-definiten Bilinearformen $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Überlegen Sie, dass

   $$M \cong \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) | A^t = A, A > 0\}$$

   ein homogener Raum ist.
   Zeigen Sie: $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ operieren transitiv auf M durch

   $$P \cdot A = PAP^t,$$

   wobei $A \in M, P \in \mathrm{GL}^{(+)}(n, \mathbb{R})$. Insbesondere gilt:

   $$M \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{O}(n) \cong \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(n).$$

5. $\mathrm{Sp}(n)$ ist zusammenhängend.