Homogene Räume

Übungsblatt 5

1. Sei G eine Liegruppe und $H \subset G$ eine Lieuntergruppe. Dann ist
$$\pi : G \to G/H$$
ein H-Prinzipalbündel. Insbesondere ist $\pi : G \to G/H$ ein Faserbündel.

2. Stiefelmannigfaltigkeiten.
Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$, wobei
$$\left\langle \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i q_i$$
auf $\mathbb{H}^n$. Schreiben Sie
$$\mathrm{V}_k(\mathbb{K}^n) := \{(v_1, ..., v_k) | v_i \in \mathbb{K}^n, \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \forall i, j\}$$
als homogenen Raum und zeigen Sie, dass
$$\pi : \mathrm{V}_k(\mathbb{K}^n) \to \mathrm{G}_k(\mathbb{K}^n), (v_1, ..., v_k) \mapsto \mathrm{span}_{\mathbb{K}^n}\{v_1, ..., v_k\}$$
ein Faserbündel ist. Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{V}_k(\mathbb{K}^n)$.
($\mathrm{G}_k(\mathbb{K}^n)$ bezeichnet die Grassmann-Mannigfaltigkeit.)

3. Beweisen Sie folgenden Satz (aus der Vorlesung):
Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Definiere für $p \in M$ die Isotropiegruppe
$$H_p := \{h \in \mathrm{Isom}(M, g) | h(p) = p\}.$$
Die Operation von H_p auf T_pM bezeichnen wir mit
$$\rho : H_p \to \mathrm{GL}(\mathrm{T}_pM), h \mapsto (dh)_p.$$
Zeigen Sie, dass für M vollständig und zusammenhängend folgendes gilt:
   (a) $\rho : H_p \to \mathrm{GL}(\mathrm{T}_pM)$ ist injektiv.
   (b) $\rho(H_p) \subset \mathrm{GL}(\mathrm{T}_pM)$ ist kompakt.

4. Seien l_1, l_2 relativ prim zu $p \in \mathbb{Z}$. Betrachten Sie $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ und die Wirkung
$$\mathbb{Z}_p \times S^3 \to S^3, (a, (z_1, z_2)) \mapsto (e^{2\pi i a \frac{l_1}{p}} z_1, e^{2\pi i a \frac{l_2}{p}} z_2).$$
Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_p$ frei und eigentlich diskontinuierlich auf S^3 operiert. Damit ist
$$L_p(l_1, l_2) := S^3/\mathbb{Z}_p$$
eine Mannigfaltigkeit und heißt Linsenraum. Für welche Werte p, l_1, l_2 ist $L_p(l_1, l_2)$ homogen?