Homogene Räume

Übungsblatt 6

1. Ein punktiert topologischer Raum (X, x_0) heißt zusammenziehbar, falls $id_X : (X, x_0) \to (X, x_0)$ zur konstanten Abbildung $c : (X, x_0) \to (X, x_0)$ homotop ist. Zeigen Sie
   (a) X zusammenziehbar $\Rightarrow$ $\pi_n(X) = 0 \quad \forall n$.
   (b) Sei $\widetilde{X} \to X$ die universelle Überlagerung. Dann gilt für jedes $n \geq 2$ $\pi_n(\widetilde{X}) \cong \pi_n(X)$.
   (c) Ist die universelle Überlagerung von X zusammenziehbar, dann gilt $\pi_n(X) = 0 \quad \forall n > 1$.
   (d) Sei M eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung $K \leq 0$. Dann ist $\pi_n(M) = 0$ für $n \geq 2$.

2. Seien M und N zusammenhängende, glatte Mannigfaltigkeiten und seien $p : \widetilde{M} \to M$ bzw. $q : \widetilde{N} \to N$ die universellen Überlagerungen. Dann gibt es zu jeder differenzierbaren Abbildung $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung $\widetilde{f} : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ mit $q \circ \widetilde{f} = f \circ p$.

3. Die universelle Überlagerung einer zusammenhängenden Liegruppe ist eine Liegruppe.

4. Berechnen Sie die Fundamentalgruppen der Fahnenmannigfaltigkeiten.

5. (a) Zeigen Sie:
   $$S^1 \to S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$$
   und
   $$S^3 \to S^{4n+3} \to \mathbb{H}P^n$$
   sind Faserbündel.
   (b) Berechnen Sie $\pi_k(\mathbb{C}P^n)$ für $k \leq 2n + 1$.
   (c) $\mathbb{H}P^n$ ist 3-zusammenhängend.