Homogene Räume

Übungsblatt 7

1. (a) Sei $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} M$ ein Faserbündel. Ein Schnitt in E ist eine stetige Abbildung $s : M \to E$ mit $p \circ s = id_M$. Zeigen Sie: Falls ein Schnitt existiert, so gilt
$$\pi_k(E, e_0) \cong \pi_k(M, p_0) \oplus \pi_k(F, e_0) \quad \forall k \geq 2.$$
   (b) Zeigen Sie:
$$\pi_k(M \times N) \cong \pi_k(M) \oplus \pi_k(N) \quad \forall k \geq 1.$$
   (c) Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und
$$ES^n := \{(x, y) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} | \langle x, y \rangle = 0, |y| = 1\}$$
   das Bündel der Einheitstangentialvektoren. Dann ist
$$S^{n-1} \hookrightarrow ES^n \to S^n$$
   ein Faserbündel und für ungerades n gilt:
$$\pi_i(ES^n) \cong \pi_i(S^{n-1}) \oplus \pi_i(S^n).$$

2. Bestimmen Sie die Kohomologie der komplexen und quaternionellen Stiefel-Mannigfaltigkeiten.

3. Bestimmen Sie $\pi_1(\mathrm{U}(n))$ und zeigen Sie, dass
   (a) $\mathrm{U}(n) \cong \mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(n)$ als Mannigfaltigkeiten.
   (b) $\pi_k(\mathrm{U}(n)) \cong \pi_k(\mathrm{SU}(n)) \quad \forall k \neq 1$.
   (c) $\pi_2(G_k(\mathbb{C}^n)) \cong \mathbb{Z}$ für $0 < k < n$.

4. Zeigen Sie:
   (a) Es gib eine Einbettung $\mathrm{U}(n) \hookrightarrow \mathrm{SO}(2n)$ als Liegruppe.
   (b) $M := \mathrm{SO}(2n)/\mathrm{U}(n)$ ist ein einfach zusammenhängender homogener Raum mit $\pi_2(M) \cong \mathbb{Z}$, falls $n > 1$.

5. Benutzen Sie das Leray-Hirsch Theorem um die Künneth-Formel
$$H^*(M \times N; \mathbb{R}) \cong H^*(M; \mathbb{R}) \otimes H^*(N; \mathbb{R})$$
   (als $\mathbb{R}$-Algebra) zu zeigen. Bestimmen Sie die $\mathbb{R}$-Algebra $H^*(S^2 \times S^4; \mathbb{R})$ und folgern Sie
$$S^2 \times S^4 \not\cong \mathbb{C}P^3.$$
   Konstruieren Sie ein Faserbündel
$$S^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^3 \to S^4.$$