Homogene Räume

Übungsblatt 8

1. Zeigen Sie den Satz aus der Vorlesung:

$$\{\text{linksinvariante Metriken auf } G\} \to \{\text{Skalarprodukte auf } \mathrm{T}_eG\},$$
$$\langle -,-\rangle_G \mapsto \langle -,-\rangle_{G|_{\mathrm{T}_eG}}$$

   ist eine Bijektion.

2. Sei G eine Liegruppe der Dimension n. Eine Form $\alpha \in \Omega^k G$ heißt linksinvariant, falls $L_g^*\alpha = \alpha \quad \forall g \in G$. Zeigen Sie, dass

$$\{\alpha \in \Omega^k G | \alpha \ \text{ linksinvariant}\} \to \Lambda^k T_e G, \alpha \mapsto \alpha_e$$

   ein Isomorphismus ist. Folgern Sie, dass es für eine orientierte, kompakte Liegruppe G genau eine linksinvariante Volumenform $\omega \in \Omega^n G$ mit $\int_G \omega = 1$ gibt.

3. Sei G eine kompakte, orientierte Liegruppe, $f : G \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ und $h \in G$. Dann gilt für das invariante Integral:

$$\int f(g)dg = \int f(hg)dg = \int f(gh)dg = \int f(g^{-1})dg = \int f(\varphi(g))dg.$$

4. Zeigen Sie: Jede biinvariante Metrik auf SO(3) und SU(2) besitzt konstant positive Schnittkrümmung.

5. Man sagt, eine kurze exakte Sequenz von Gruppen $0 \to A \to B \to C \to 0$ spaltet, falls eine Abbildung $B \to A$ (oder $C \to B$) existiert, so dass $A \to B \to A = id_A$ (bzw. $C \to B \to C = id_C$). Sei $F \hookrightarrow E \to B$ ein Faserbündel, so dass die Inklusion der Faser $F \hookrightarrow E$ nullhomotop, d.h. homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Zeigen Sie: Die lange exakte Sequenz der Homotopiegruppen zerfällt in kurze exakte, spaltende Sequenzen $0 \to \pi_n(E) \to \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F) \to 0$. Folgern Sie hieraus, dass $\pi_n(B) \cong \pi_{n-1}(F) \oplus \pi_n(E)$ für alle $n \geq 2$. Folgern Sie weiter, dass

$$\pi_n(S^4) \cong \pi_{n-1}(S^3) \oplus \pi_n(S^7) \quad \text{und}$$
$$\pi_n(S^8) \cong \pi_{n-1}(S^7) \oplus \pi_n(S^{15}).$$

   Zeigen Sie außerdem: Falls $S^k \hookrightarrow S^m \to S^n$ ein Faserbündel ist, so gilt $k = n-1$ und $m = 2n-1$.